19-10-18

Γενικότερα αν $A_1, A_2, \ldots, A_k \in GL_n(\mathbb{K})$ τότε $(A_1 A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

<u>Απόδειξη</u>

Αν $k=1$ τότε ο ισχυρισμός είναι άμεσος

Αν $k=2$, τότε ο ισχυρισμός είναι αληθής όπως έχουμε δείξει.

Έστω ότι: $A_1 \ldots A_k$ αντιστρέψιμος και $(A_1 A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$

Θεωρούμε τους πίνακες $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1} \in GL_n(\mathbb{K})$

Τότε $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_k, A_{k+1} \in GL_n(\mathbb{K})$ και τότε από την περίπτωση $k=2$,

έπεται ότι $A_1 \cdot A_2 \ldots A_{k+1} \in GL_n(\mathbb{K})$ και

$(A_1 \cdot A_2 \ldots A_k A_{k+1})^{-1} = A_{k+1}^{-1} (A_1 \cdot A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_{k+1}^{-1} \cdot A_k^{-1} \ldots A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$

Άρα ο ισχυρισμός είναι αληθής $\forall k \in \mathbb{N}$

Αν $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A \in GL_n(\mathbb{K})$. Τότε από τον ισχυρισμό:

$A^k \in GL_n(\mathbb{K})$ και $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

Έχουμε ορίσει την k-δύναμη A^k ενός $n \times n$ πίνακα A, $\forall k \geq 0$

Αν A είναι αντιστρέψιμος, τότε μπορούμε να ορίσουμε και αρνητικές δυνάμεις του A ως εξής: $A^{-k} = (A^{-1})^k$, $\forall k \geq 0$

<u>Το ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα</u>

Έστω $A = a_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$. Το <u>ίχνος</u> του A ορίζεται να είναι ο αριθμός

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

<u>Ιδιότητες</u>

1. $A, B \in M_n(\mathbb{K})$: $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

$$Tr(A+B) = \sum_{k=1}^{n} (A+B)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} [(A)_{kk} + (B)_{kk}] = \sum_{k=1}^{n} (A)_{kk} + \sum_{k=1}^{n} (B)_{kk} =$$

$$= Tr(A) + Tr(B)$$

② $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K} : Tr(\lambda A) = \lambda \cdot Tr(A)$

$$Tr(\lambda \cdot A) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda A)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} [\lambda (A)_{kk}] = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} (A)_{kk} = \lambda \cdot Tr(A)$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Τότε $A \cdot B = 0$

Τότε: $Tr(A) = 3$, $Tr(B) = 2$. Άρα $Tr(A) \cdot Tr(B) = 3 \cdot 2 = 6$

Όμως $Tr(A \cdot B) = 0 = Tr(0) = 0$. Άρα: $Tr(A \cdot B) \neq Tr(A) \cdot Tr(B)$

③ $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) : Tr(A \cdot B) = Tr(B \cdot A)$

$$Tr(A \cdot B) = \sum_{k=1}^{n} (A \cdot B)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} (A)_{k\lambda} (B)_{\lambda k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} (B)_{\lambda k} (A)_{k\lambda} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (B)_{\lambda k} (A)_{k\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} (B \cdot A)_{\lambda\lambda} = Tr(B \cdot A)$$

④ $Tr(0) = 0$, $Tr(I_n) = n$, και: υπάρχουν πίνακες $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) : AB - BA = I_n$;

Έστω ότι $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ και: $AB - BA = I_n$

Τότε $Tr(AB - BA) = Tr(I_n) \Longrightarrow Tr(A \cdot B) - Tr(B \cdot A) = n \Longrightarrow$

$\Rightarrow 0 = n$ άτοπο διότι $n \geq 1$. Άρα $\nexists A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) : AB - BA = I_n$.

<u>Ο ανάστροφος πίνακας</u>

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ Ο ανάστροφος ^tA του A είναι ο $n \times m$ πίνακας με στοιχεία $(^tA)_{ij} = (A)_{ji}$

$^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Ιδιότητες

① $A, B \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) : {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

$[{}^t(A+B)]_{ij} = (A+B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji} = ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij} = ({}^tA + {}^tB)_{ij}$

Άρα ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

② $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K}),\ \lambda \in \mathbb{K} : {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$

$[{}^t(\lambda A)]_{ij} = (\lambda A)_{ji} = \lambda \cdot (A)_{ji} = \lambda ({}^tA)_{ij} = (\lambda\, {}^t(A))_{ij} \Rightarrow {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$

③ $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) : {}^t({}^tA) = A$

$[{}^t({}^tA)]_{ij} = ({}^tA)_{ij} = (A)_{ij} \Rightarrow {}^t({}^tA) = A$

④ $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) : {}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$

$[{}^t(A \cdot B)]_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{jk} (B)_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (B)_{ki} (A)_{jk} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tB)_{ik} ({}^tA)_{kj} =$

$= ({}^tB \cdot {}^tA)_{ij}$. Άρα ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$

ΑΣΚΗΣΗ: $A \in GL_n(\mathbb{K})$ τότε Θ.δ.ο. ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ και $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

ΛΥΣΗ: $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \exists A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ και: $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} A \Longrightarrow$

$\Rightarrow {}^t(A \cdot A^{-1}) = {}^tI_n = {}^t(A^{-1} \cdot A) \Rightarrow {}^t(A^{-1} \cdot A) = I_n = {}^t(A \cdot A^{-1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow {}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = I_n = {}^tA \cdot {}^t(A^{-1}) \Rightarrow {}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ και $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

ΚΛΑΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

① $O \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας

② $\forall n \geq 1 : I_n$: ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας

③ Τετραγωνικοί πίνακες: πλήθος γραμμών = πλήθος στηλών

④ Ένας πίνακας $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ καλείται <u>βαθμωτός</u> αν και μόνο αν $\exists \lambda \in \mathbb{K}$

$A = \lambda \cdot I_n \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$

⑤ Ο $A \in M_n(\mathbb{K})$ καλείται <u>διαγώνιος</u> $\Longleftrightarrow (A)_{ij}=0, \forall i \neq j$

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

⑥ Ο $A \in M_n(\mathbb{K})$ καλείται <u>άνω τριγωνικός</u> $\Longleftrightarrow (A)_{ij}=0$, αν $i>j$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Παρόμοια ο $A \in M_n(\mathbb{K})$ καλείται κάτω τριγωνικός $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (A)_{ij}=0$, αν $j>i$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

⑦ Ο $A \in M_n(\mathbb{K})$ καλείται <u>αυστηρά άνω τριγωνικός</u> $\Leftrightarrow (A)_{ij}=0$, αν $i \geq j$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Παρόμοια ο A <u>αυστηρά κάτω τριγωνικός</u> $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (A)_{ij}=0$, αν $i \leq j$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

⑧ Ο $A \in M_n(\mathbb{K})$ καλείται <u>ταυτοδύναμος</u> $\Leftrightarrow A^2=A$

παράδειγμα: $0, I_n, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

⑨ Ο $A \in M_n(\mathbb{K})$ λέγεται <u>μηδενοδύναμος</u> $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: A^k=0$

<u>Παράδειγμα</u>. $0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, αυστηρά άνω τριγωνικοί πίνακες

⑩ Ο $A \in M_n(\mathbb{K})$ καλείται <u>συμμετρικός</u> $\Leftrightarrow {}^tA=A \Leftrightarrow \forall i,j=1\dots n: (A)_{ji}=(A)_{ij}$

⑪ Ο $A \in M_n(\mathbb{K})$ καλείται <u>αντισυμμετρικός</u> $\Leftrightarrow {}^tA=-A \Leftrightarrow \forall i,j=1,\dots,n$ $(A)_{ji}=-(A)_{ij}$. Ιδιαίτερα αν $i=j$ προκύπτει ότι $(A)_{ii}=0$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

<u>Στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές/στήλες ενός πίνακα</u>

$$(\Sigma)\begin{cases} 2x+3y=4 \\ x+2y=3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$(\Sigma)_1\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 2x\ 4y=6 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \quad \Gamma_2 \mapsto 2\Gamma_2$$

$$(\Sigma_2)\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 0\cdot x+y=2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \Gamma_2 \mapsto \Gamma_2-\Gamma_1$$

$$(\Sigma)_3\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 0\cdot x+3y=6 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \quad \Gamma_2 \mapsto 3\Gamma_2$$

$$(\Sigma)_4\begin{cases} 2x+0\cdot y=-2 \\ 0\cdot x+3\cdot y=6 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \quad \Gamma_1 \mapsto \Gamma_1-\Gamma_2$$

$$(\Sigma)_5\begin{cases} x+0\cdot y=-1 \\ 0\cdot x+y=2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \Gamma_1 \mapsto \tfrac{1}{2}\Gamma_1,\ \Gamma_2 \mapsto \tfrac{1}{3}\Gamma_2$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x=-1 \\ y=2 \end{array}}$$

$$A=\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1\text{-γραμμή } \Gamma_1 \\ \leftarrow 2\text{-γραμμή } \Gamma_2 \\ \vdots \\ \leftarrow i\text{-γραμμή } \Gamma_i \\ \vdots \\ \leftarrow m\text{-γραμμή } \Gamma_m \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1\text{-στήλη} & 2\text{-στήλη} & & 3\text{-στήλη} & \dots & n\text{-στήλη} \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 & & \Sigma_3 & \dots & \Sigma_n \end{array} & \end{array}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Οι παρακάτω πράξεις στις γραμμές του πίνακα A καλούνται στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του A.

① Αντικατάσταση στον A της i-γραμμής Γ_i, με τη γραμμή $\Gamma_i+\lambda\Gamma_j$ όπου $i,j=1,\dots,m$ και $\lambda\in\mathbb{K}$. Η πράξη αυτή συμβολίζεται με:

$$\boxed{\Gamma_i \mapsto \Gamma_i+\lambda\Gamma_j}$$

② Αμοιβαία εναλλαγή της i-γραμμής Γ_i με την j-γραμμή Γ_j:

$$\boxed{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} \qquad 1\le i\ne j\le m$$

③ Αντικατάσταση μιας i-γραμμής Γ_i με τη γραμμή $\lambda\cdot\Gamma_i$, $\lambda\ne 0$, $\lambda\in\mathbb{K}$

$$\boxed{\Gamma_i \mapsto \lambda\cdot\Gamma_i} \qquad 1\le i\le m$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & 14\\ -1 & 4 & 2 & 0\\ 1 & 10 & 12 & 14\end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1\mapsto\frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7\\ -1 & 4 & 2 & 0\\ 1 & 10 & 12 & 14\end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2\mapsto\Gamma_2+\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 7 & 7 & 7\\ 1 & 10 & 12 & 14\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\mapsto\Gamma_3-\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 7 & 7 & 7\\ 0 & 7 & 7 & 7\end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3\mapsto\Gamma_3-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 7 & 7 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2\mapsto\frac{1}{7}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1\mapsto\Gamma_1-3\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2-10-18

ΧΡΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Μαθηματικά, Φυσική, Οικονομικές Επιστήμες, Επιστήμες μηχανικών, Βιολογία, ...

ΚΕΦΑΛΑΙΑ

1. ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ
2. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ
4. ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΗ
5. ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ
6. ΣΧΕΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ
7. ΟΜΟΙΟΙ ΚΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ-ΒΑΘΜΙΔΑ ΠΙΝΑΚΑ
9. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

- $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ (φυσικοί)
- $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3\dots\}$ (φυσικοί μαζί με το μηδέν)
- $\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2\}$ (ακέραιοι)
- $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\}$ (ρητοί)
- $\mathbb{R}=\{x \mid x:$ ρητός ή άρρητος$\}$ (πραγματικοί)
- $\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}$ και $i^2=-1\}$ (μιγαδικοί)

· $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{N}_0\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$

Στα παραπάνω σύνολα αριθμών ορίζονται οι οικείες πράξεις πρόσθεσης (+) και πολλαπλασιασμού (·)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ +, ·

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (προσεταιριστική ιδιότητα πρόσθεσης).

① $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ (προσεταιριστική ιδιότητα πολ/σμού)

② $x+0=x=0+x$ (ύπαρξη μηδενικού ουδέτερου στοιχείου για την πρόσθεση)
②' $x\cdot 1=x=1\cdot x$ (ύπαρξη μοναδιαίου ουδέτερου στοιχείου για τον πολ/σμό)
③ $x+(-x)=0=(-x)+x$ (ύπαρξη αντίθετου στοιχείου για την πρόσθεση)
③' $x\cdot x'=1=x'x$ (ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου για τον πολ/μο)
④ $x+y=y+x$ (Μεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης)
④' $x\cdot y=y\cdot x$ (Μεταθετική ιδιότητα πολ/μου)
⑤ $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ (επιμεριστική ιδιότητα πρόσθεσης ως προς τον πολ/μο)

Έστω $\mathbb{K}$ ένα τυχαίο σύνολο το οποίο είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις.

$+: \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K},\ (x,y)\longmapsto x+y$ (πρόσθεση)
$\cdot: \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K},\ (x,y)\longmapsto x\cdot y$ (πολ/μός)

Αν για τις πράξεις $+,\cdot$ ικανοποιούνται οι ιδιότητες ① ①' ② ②' ③ ③' ④ ④' ⑤ τότε το $\mathbb{K}$ καλείται <u>σώμα</u>

Το $\mathbb{Z}$ δεν είναι σώμα (δεν ισχύει η ③')

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $\mathbb{K}=\{A,K\}$

άσπρο, κόκκινο

+	A	K
A	A	K
K	K	A

·	A	K
A	A	K
K	A	K

5-10-18

Από τώρα και στο εξής με τον όρο σώμα θα εννοούμε ένα από τα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ και θα το συμβολίζουμε με $\mathbb{K}$.

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σταθεροποιούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Ορισμός: Έστω $m, n \geq 1$, δύο θετικοί ακέραιοι.
Ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μια διάταξη $m \cdot n$ το πλήθος αριθμών $a_{ij} \in \mathbb{K}$ από το σώμα $\mathbb{K}$ σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ως εξής
όπου: $i = 1, 2 \dots m$ $j = 1, 2, \dots, n$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \Gamma_1 \\ \to \Gamma_2 \\ \\ \to \Gamma_i \\ \\ \to \Gamma_m \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 & & \Sigma_j & & \Sigma_n \end{array} \end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ 3x2 πίνακας

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 2x3 πίνακας

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 1x3 πίνακας

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 3x1 πίνακας

Πρώτη εμφάνιση → Γραμμικά συστήματα

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \longmapsto B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \text{πίνακας συντελεστών συστήματος}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \text{επαυξημένος πίνακας}$$

Θα γράφαμε για τον πίνακα A:
$A=(a_{ij})=(A)_{ij}$

Ο πίνακας A αποτελείται από:

- m-<u>γραμμές</u> $Γ_1=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n}),\dots,Γ_m=(a_{m1},a_{m2},\dots,a_{mn})$
- n-<u>στήλες</u> $Σ_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{12}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix},\dots,Σ_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix}$

Κάθε γραμμή $Γ_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})$ αποτελείται από n-στοιχεία

Κάθε στήλη $Σ_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$ αποτελείται από m-στοιχεία.

Το <u>μέγεθος</u> του <u>πίνακα</u> είναι $m\times n$ → m: πλήθος γραμμών
→ n: πλήθος στηλών

Το στοιχείο a_{ij} βρίσκεται στην τομή της i-γραμμής και της j-στήλης.
Το στοιχείο a_{ij} οφείλεται να είναι το στοιχείο του A στην (i,j) θέση.

Δύο πίνακες $A(a_{ij})$ και $B(b_{ij})$ είναι ίσοι $(A=B)$ αν και μόνο αν:
- έχουν ίδιο μέγεθος
- τα στοιχεία στις αντίστοιχες θέσεις (i,j) είναι ίσα δηλαδή $a_{ij}=b_{ij}$ $(\forall\ i=1,\dots,m\ \ j=1,\dots,n)$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Ένας $m\times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μία απεικόνιση $A:\{1,2,\dots,m\}\times\{1,2,\dots,n\}\to\mathbb{K}$

$$(i,j)\longmapsto A(i,j)\underset{\text{ορισμός}}{=}a_{ij}$$

<u>Συμβολισμός</u>: $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})=\{A\mid A: m\times n$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{K}\}$.
→ σύνολο όλων των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$.

Ένας πίνακας $A=(a_{ij})$ μεγέθους $m \times n$ καλείται <u>τετραγωνικός</u>

<u>ορισμός</u> → $m=n \Leftrightarrow$ πλήθος γραμμών του A = πλήθος στηλών του A

Αν $A=(a_{ij})$ είναι ένας πίνακας $n \times n$, τότε η κύρια διαγώνιος του A ορίζεται να είναι οι αριθμοί: $a_{11}\ a_{22} \dots a_{nn}$

π.χ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ Γενικότερα: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων μεγέθους $n \times n$ θα συμβολίζεται με $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

① $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ και $A=(a_{ij})$ όπου $a_{ij}=|i-j|$

$i,j=1,2,\dots,n$

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & & & & \\ n-1 & n-2 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ Είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο

② $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $a_{ij}=i^j$

Υποθέτουμε $m=2$, $n=3$. Άρα είναι 2×3 πίνακας

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

<u>ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ</u>

Έστω $A=(a_{ij})$ και $B=(b_{ij})$ δύο πίνακες $m \times n$ με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$.

- Το <u>άθροισμα</u> των πινάκων A και B ορίζεται να είναι ο $m \times n$ πίνακας $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Και αυτόν τον τρόπο έχουμε ορίσει μία πράξη πρόσθεσης στο σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})+\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\to\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$
$$(A,B)\longmapsto A+B$$

Ιδιότητες πρόσθεσης πινάκων $\forall A,B,\Gamma\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

① $A+(B+\Gamma)=(A+B)+\Gamma$

② $\exists\, O\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}): A+O=A=O+A$

③ $\forall A\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \exists(-A)\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}): A+(-A)=O=(-A)+A$

④ $A+B=B+A$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ

① Επειδή $A,B,\Gamma\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ έπεται από τον ορισμό πρόσθεσης πινάκων: $B+\Gamma$ και $A+(B+\Gamma)\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (1)

$A+B,\ (A+B)+\Gamma\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (2)

$(1),(2)\Rightarrow A+(B+\Gamma),\ (A+B)+\Gamma\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Έστω $i=1,2,\dots,m$ $j=1,2,\dots,n$

$[A+(B+\Gamma)]_{ij}=(A)_{ij}+(B+\Gamma)_{ij}=(A)_{ij}+[(B)_{ij}+(\Gamma)_{ij}]=[(A)_{ij}+(B)_{ij}]+(\Gamma)_{ij}=$
$=(A+B)_{ij}+(\Gamma)_{ij}=[(A+B)+\Gamma]_{ij}$

Επειδή έχουμε $[A+(B+\Gamma)]_{ij}=[(A+B)+\Gamma]_{ij}$ $\quad 1\le i\le m,\ 1\le j\le n$

έπεται ότι: $A+(B+\Gamma)=(A+B)+\Gamma$

② Έστω ότι υπάρχουν δύο πίνακες $O_1, O_2\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$\forall A\in\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}): \begin{cases} A+O_1=A=O_1+A & (i)\\ A+O_2=A=O_2+A & (ii)\end{cases}$ θ.δ.ο. $O_1=O_2$

Στην (i) θέτουμε: $A=O_2$: $O_2+O_1=O_2=O_1+O_2$
Στην (ii) θέτουμε: $A=O_1$: $O_1+O_2=O_1=O_2+O_1$
$\Rightarrow \boxed{O_1=O_2}$

Έστω ότι υπάρχει O: $A+O=A=O+A$
$\Rightarrow (A+O)_{ij}=(A)_{ij}\Rightarrow (A)_{ij}+(O)_{ij}=(A)_{ij}\Rightarrow (O)_{ij}=0$
$\forall\, i=1,\dots,m$
$j=1,\dots,n$

$(A+O)_{ij} = (A)_{ij} + (O)_{ij} = (A)_{ij} + (O)_{ij} = (A)_{ij} \Rightarrow A+O=A \quad \forall\, i=1,2,\dots,m$
$j=1,2,\dots,n$

Παρόμοια $O+A=A$

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>: Ο πίνακας $O \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ όπου $(O)_{ij}=0$ καλείται ο <u>μηδενικός $m\times n$ πίνακας</u>

) Αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ ορίζουμε έναν πίνακα μεγέθους $m\times n$ ως εξής:
$(-A)_{ij} = -(A)_{ij}$ $\begin{matrix} 1\le i\le m \\ 1\le j\le n \end{matrix}$ Αν $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ τότε

$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$. Τότε $A+(-A)=O=(-A)+A$, διότι
$[(-A)+A]_{ij} = (-A)_{ij} + (A)_{ij} = (A)_{ij} - (A)_{ij} = 0 = (O)_{ij} \Rightarrow$
$\xrightarrow[1\le j\le n]{1\le i\le m} A+(-A)=O$ Παρόμοια: $(-A)+A=O$

Έστω $X \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$: $A+X=O=X+A \Rightarrow$ Θ.δ.ο. $X=-A$
$\Rightarrow (A+X)_{ij} = (O)_{ij} \Rightarrow (A)_{ij} + (X)_{ij} = (O)_{ij} \Rightarrow (X)_{ij} = (-A)_{ij}$ $\begin{matrix} 1\le i\le m \\ 1\le j\le n \end{matrix}$

Άρα $X=-A$

Ο μοναδικός πίνακας $-A$ έτσι ώστε: $A+(-A)=O=(-A)+A$ καλείται ο αντίθετος του A.
$(-A)_{ij} = -(A)_{ij}$

9-10-18

ΒΑΘΜΩΤΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Έστω $A\in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και $\kappa\in\mathbb{K}$. Ο βαθμωτός πολ/μος του κ με τον A είναι ο πίνακας $\kappa\cdot A\in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ορίζεται ως:

$(\kappa\cdot A)_{ij}=\kappa\cdot(A_{ij})$ όπου $1\le i\le m$, $1\le j\le n$

Αν $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$ τότε $\kappa\cdot A=\begin{pmatrix} \kappa\cdot a_{11} & \kappa\cdot a_{12} & \dots & \kappa\cdot a_{1n} \\ \kappa\cdot a_{21} & \kappa\cdot a_{22} & \dots & \kappa\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \kappa\cdot a_{m1} & \kappa\cdot a_{m2} & \dots & \kappa\cdot a_{mn}\end{pmatrix}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

① Αν $A,B\in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\kappa\in\mathbb{K}$, τότε $\boxed{\kappa\cdot(A+B)=\kappa\cdot A+\kappa\cdot B}$

② Αν $A\in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{K}$, τότε $\boxed{(\kappa+\lambda)A=\kappa A+\lambda A}$

③ Αν $A\in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{K}$, τότε $\boxed{(\lambda\cdot A)\kappa=(\kappa\cdot\lambda)\cdot A}$

④ $\boxed{1\cdot A=A}$ (Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου)

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

① Προφανώς $\kappa\cdot(A+B)$, $\kappa\cdot A+\kappa\cdot B\in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$[\kappa\cdot(A+B)]_{ij}=\kappa\cdot(A+B)_{ij}=\kappa[(A)_{ij}+(B)_{ij}]=\kappa\cdot(A)_{ij}+\kappa\cdot(B)_{ij}=$$
$$=(\kappa\cdot A)_{ij}+(\kappa\cdot B)_{ij}=(\kappa\cdot A+\kappa\cdot B)_{ij}$$

Άρα $[\kappa\cdot(A+B)]_{ij}=(\kappa\cdot A+\kappa\cdot B)_{ij}$, $\forall\ 1\le i\le m$, $1\le j\le n$

Επομένως $\kappa\cdot(A+B)=\kappa\cdot A+\kappa\cdot B$

③ Προφανώς $\kappa\cdot(\lambda\cdot A)$, $(\kappa\cdot\lambda)A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

Τότε: $[\kappa\cdot(\lambda\cdot A)]_{ij} = \kappa\cdot(\lambda\cdot A)_{ij} = \kappa\cdot(\lambda\cdot(A)_{ij}) =$
$=(\kappa\cdot\lambda)\cdot(A)_{ij} = [(\kappa\cdot\lambda)\cdot A]_{ij}$ $\forall$ $1\le i\le m$, $1\le j\le n$

Επομένως: $\kappa\cdot(\lambda\cdot A) = (\kappa\cdot\lambda)A$

$\kappa\cdot A = 0 \Rightarrow \kappa^{-1}\cdot(\kappa\cdot A) = 0\cdot\kappa^{-1} \Leftrightarrow 1\cdot A = 0 \Leftrightarrow A = 0$
(Εφόσον $\kappa\neq 0$)

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω A, B δύο πίνακες. Το γινόμενο A·B ορίζεται $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ πλήθος στηλών του A = πλήθος γραμμών του B και τότε: $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ και $B\in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, τότε:

$$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj}$$

Δηλαδή αν: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, τότε:

$$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj} = a_{i1}\cdot b_{kj} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \dots + a_{in}\cdot b_{nj}$$

και επιπλέον $A\cdot B\in M_{m\times r}(\mathbb{K})$

[i-γραμμή του A] • [j-στήλη του B]

$$(a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in}) \bullet \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \dots + a_{in}\cdot b_{nj}$$

στοιχείο στην (i,j) θέση του AB

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

① $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Τώρα ορίζεται το γινόμενο $A\cdot B=\begin{pmatrix}(1\,2\,4)\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} & (1\,2\,4)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\\ (2\,-1\,0)\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix} & (2\,-1\,0)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1+8-4 & 2+4\\ 2-4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -2 & 4\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}(1\ 2)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} & (1\ 2)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} & (1\ 2)\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\\ (4\ 0)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} & (4\ 0)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} & (4\ 0)\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\\ (-1\ 1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} & (-1\ 1)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} & (-1\ 1)\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+4 & 2-2 & 4\\ 4 & 8 & 16\\ -1+2 & -2-1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 4\\ 4 & 8 & 16\\ +1 & -3 & -4\end{pmatrix}$$

A_{2x3} B_{3x2} Άρα: $A\cdot B\neq B\cdot A$

$A\cdot B_{2x2}$ $B\cdot A_{3x3}$

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ A_{1x3} $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ B_{3x1}

$A\cdot B_{1x1}=(3)$ $B\cdot A_{3x3}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(3) $A_{2x2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $B_{2x2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$

Ιδιαίτερα βλέπουμε ότι: $A,B\neq 0$ Όμως $B\cdot A=0$

④ $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&0\\2&0\end{pmatrix}$, $\Gamma=\begin{pmatrix}4&0\\1&1\end{pmatrix}$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&0\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0\\0&0\end{pmatrix}$

$A\cdot\Gamma=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0\\0&0\end{pmatrix}$

Άρα $A\cdot B=A\cdot\Gamma$ και $B\neq\Gamma$
$(A\neq 0)$

⑤ $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $B\cdot B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0$

Άρα $B^2=0$, $B\neq 0$

12-10-18

$A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ $B\in M_{n\times r}(\mathbb{K})$. Τότε $A\cdot B\in M_{m\times r}(\mathbb{K})$ και:

$$\boxed{(A\cdot B)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(B)_{kj}}\qquad 1\leq i\leq m,\quad 1\leq j\leq n$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛ/ΜΟΥ ΠΙΝΑΚΩΝ

① Έστω A,B,Γ τρεις πίνακες έτσι ώστε τα γινόμενα $A\cdot B$ και $(A\cdot B)\cdot\Gamma$ να ορίζονται. Τότε ορίζονται και τα γινόμενα $B\cdot\Gamma$ και $A\cdot(B\cdot\Gamma)$ και επιπλέον $(A\cdot B)\cdot\Gamma=A\cdot(B\cdot\Gamma)$

Απόδειξη

Έστω $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Τότε ο B θα είναι μεγέθους $n\times r$, δηλαδή $B\in M_{n\times r}(\mathbb{K})$. Τότε $A\cdot B\in M_{m\times r}(\mathbb{K})$. Επειδή το γινόμενο $(A\cdot B)\cdot\Gamma$ ορίζεται, έπεται ότι $\Gamma\in M_{r\times s}(\mathbb{K})$. Προφανώς τότε το γινόμενο $B\cdot\Gamma$ ορίζεται και $B\cdot\Gamma\in M_{n\times s}(\mathbb{K})$. Προφανώς τότε το γινόμενο $A\cdot(B\cdot\Gamma)$ ορίζεται και $A\cdot(B\cdot\Gamma)\in M_{m\times s}(\mathbb{K})$. Τα μεγέθη των γινομένων $(A\cdot B)\cdot\Gamma$ και $A\cdot(B\cdot\Gamma)$ είναι ίσα. Για να δείξουμε ότι: $A\cdot(B\cdot\Gamma)=(A\cdot B)\cdot\Gamma$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$[A\cdot(B\cdot\Gamma)]_{ij} = [(A\cdot B)\cdot\Gamma]_{ij}$

$\bullet\ [A\cdot(B\cdot\Gamma)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(B\cdot\Gamma)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}\cdot\sum_{\lambda=1}^{r}(B)_{k\lambda}(\Gamma)_{\lambda j} =$

$= \sum_{k=1}^{n}\cdot\sum_{\lambda=1}^{r}(A)_{ik}[(B)_{k\lambda}(\Gamma)_{\lambda j}] =$

$= \sum_{\lambda=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}[(B)_{k\lambda}\cdot(\Gamma)_{\lambda j}] =$

$= \sum_{\lambda=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}[(A)_{ik}(B)_{k\lambda}]\cdot(\Gamma)_{\lambda j} =$

$= \sum_{\lambda=1}^{r}(A\cdot B)_{i\lambda}(\Gamma)_{\lambda j} = [(A\cdot B)\cdot\Gamma]_{ij}$

Άρα δείξαμε ότι $[A\cdot(B\cdot\Gamma)]_{ij} = [(A\cdot B)\cdot\Gamma]_{ij}$ $\begin{matrix}1\le i\le m\\ 1\le j\le n\end{matrix}$

$\Rightarrow A\cdot(B\cdot\Gamma) = (A\cdot B)\cdot\Gamma$

② Για κάθε $n\geq 1$, ορίζεται ο πίνακας $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ και $(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$.
Άρα $I_n = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$. Τότε αν $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, τότε

$\boxed{I_n\cdot A = A\cdot I_n}$

<u>Απόδειξη</u>

Προφανώς $I_m\cdot A$, $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Αν $\begin{matrix}1\le i\le m\\ 1\le j\le n\end{matrix}$, τότε θα έχουμε:

$(I_m\cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m}(I_m)_{ik}\cdot(A)_{kj} = \sum_{k=1}^{m}\delta_{ik}(A)_{kj} = \underbrace{\cancel{\delta_{i1}}}_{0}(A)_{1j} + \underbrace{\cancel{\delta_{i2}}}_{0}(A)_{2j} + \dots + \overset{1}{\cancel{\delta_{ii}}}(A)_{ij} + \dots +$

$+ \overset{0}{\cancel{\delta_{im}}}(A)_{mj} = (A)_{ij}$

Άρα: $(I_n\cdot A)_{ij} = (A)_{ij} \Rightarrow I_n\cdot A = A$

Παρόμοια: $A\cdot I_n = A$

③ $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B, \Gamma \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$. Τότε: $\boxed{A\cdot(B+\Gamma) = A\cdot B + A\cdot\Gamma}$

$A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\Gamma \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$. Τότε: $\boxed{(A+B)\cdot\Gamma = A\cdot\Gamma + B\cdot\Gamma}$

<u>Απόδειξη</u>

Έχουμε: $[A\cdot(B+\Gamma)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}\cdot(B+\Gamma)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}\Big((B)_{kj}+(\Gamma)_{kj}\Big) =$

$= \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}\Big((B)_{kj}+(\Gamma)_{kj}\Big) = \sum_{k=1}^{n}\Big((A)_{ik}\cdot(B)_{kj}+(A)_{ik}\,(\Gamma)_{kj}\Big) =$

$= \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}+(B)_{kj} + \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}\cdot(\Gamma)_{kj} = (A\cdot B)_{ij}+(A\Gamma)_{ij} = (A\cdot B + A\cdot\Gamma)_{ij}$

Άρα $A\cdot(B+\Gamma) = A\cdot B + A\cdot\Gamma$

Παρόμοια έχουμε: $(A+B)\Gamma = A\Gamma + B\Gamma$

Οι παραπάνω ισότητες: $(A+B)\cdot\Gamma = A\cdot\Gamma + B\cdot\Gamma$ και $A\cdot(B+\Gamma) = A\cdot B + A\cdot\Gamma$ καλούνται <u>επιμεριστικές ιδιότητες</u> της πρόσθεσης ως προς τον πολ/μο

④ Αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε: $\boxed{\lambda(A\cdot B) = (\lambda\cdot A)\cdot B = A\cdot(\lambda\cdot B)}$

<u>Απόδειξη</u>

Οι πίνακες $\lambda\cdot(A\cdot B)$, $(\lambda\cdot A)\cdot B$ έχουν το ίδιο μέγεθος $m\times r$.

$[\lambda\cdot(A\cdot B)]_{ij} = \lambda\cdot(A\cdot B)_{ij} = \lambda\cdot\sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}\cdot(B)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\lambda\cdot(A)_{ik}\cdot(B)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(\lambda A)_{ik}\cdot(B)_{kj}$

$= [(\lambda A)\cdot B]_{ij}$

Άρα $\lambda\cdot(A\cdot B) = (\lambda A)\cdot B$

Παρόμοια: $\lambda(A B) = A\cdot(\lambda\cdot B)$

ΔΥΝΑΜΗ ΠΙΝΑΚΑ

Ένας πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ καλείται <u>τετραγωνικός</u> $\Leftrightarrow m=n$.

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Ορίζουμε:

$A^0 = I_n$ Έστω ότι έχουμε ορίσει με αυτή τη διαδικασία

$A^1 = A$ τον A^k. Τότε ορίζουμε: $A^{k+1} = A^k \cdot A$

$A^2 = A \cdot A$ Έτσι λοιπόν ορίζεται η κ-δύναμη του A, $\forall k \geq 0$

$A^3 = A^2 \cdot A$

ΑΡΧΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Έστω ότι η $P(n)$ είναι μία μαθηματική πρόταση η οποία εξαρτάται από τον φυσικό $n \in \mathbb{N}_0$. Υποθέτουμε ότι η πρόταση $P(0)$, $P(1)$ αληθής. Αν γνωρίζοντας ότι η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής, να έχουμε ότι και η $P(n+1)$ είναι αληθής τότε και η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής, $\forall n \in \mathbb{N}_0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $A^{k+\lambda} = A^k \cdot A^\lambda$
2. $(A^k)^\lambda = A^{k\lambda}$

Αποδείξεις

1. Έστω η μαθηματική πρόταση $P(\lambda)$: $A^{k+\lambda} = A^k \cdot A^\lambda$. $P(0) = A^{k+0} = A^k \cdot A^0$ αληθής διότι $A^{k+0} = A^k \cdot A^0 = A^k \cdot I_n = A^k$.

$P(1) = A^{k+1} = A^k \cdot A^1$ αληθής από τον ορισμό δύναμης πίνακα.

Έστω ότι η $P(\lambda)$ είναι αληθής: $A^{k+\lambda} = A^k \cdot A^\lambda$

Τότε: $A^{k+\lambda+1} = A^{(k+\lambda)+1} = A^{k+\lambda} \cdot A^1 = (A^k \cdot A^\lambda) \cdot A^1 = A^k \cdot (A^\lambda A^1) = A^k \cdot (A^{\lambda+1}) \Rightarrow P(\lambda+1)$ αληθής

Άρα από Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής $\Rightarrow P(\lambda)$ αληθής, $\forall \lambda \in \mathbb{N}_0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

1. $(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Όμως αν $AB = BA$ τότε $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Άρα $A\cdot B \neq B\cdot A$

$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$

$B^2=BB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$

(2) $A^2-B^2 \overset{?}{=} (A+B)\cdot(A-B)$

Θα έχαμε: $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2\neq A^2-B^2$

Όμως αν $AB=BA$, τότε $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. Τότε $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B^2=0$

$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B\cdot A=0$. Τότε $A^2-B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$(A+B)(A-B)=A^2+B\cdot A-A\cdot B+B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$

(3) $(A+B)^3\neq A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$. Όμως αν $A\cdot B=B\cdot A$ τότε $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας $A\in M_n(K)$ καλείται αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ $\exists\, A'\in M_n(K)$

$A\cdot A'=I_n=A'\cdot A$

ΣΧΟΛΙΟ: Ο πίνακας A' στον ορισμό είναι μοναδικός

Απόδειξη: Έστω $A\cdot A'=I_n=A'\cdot A$ | $\Rightarrow A''\cdot A\cdot A'=I_n\cdot A'' \Leftrightarrow (A''\cdot A)\cdot A'=A'' \Leftrightarrow$

$A\cdot A''=I_n=A''\cdot A$ | $\Leftrightarrow I_n\cdot A'=A'' \Leftrightarrow A'=A''$

Ο μοναδικός πίνακας A' στον ορισμό καλείται ο αντίστροφος του A και συμβολίζεται με: A^{-1}.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(1) Έστω $A\in M_n(K)$ και υποθέτουμε ότι $A^k=I_n$ για κάποιο $k>0$. Τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και: $A'=A^{k-1}$.

Πράγματι: $I_n=A^k=A\cdot A^{k-1}$ και $A^{k-1}\cdot A=A^k=I_n$

Άρα $A\cdot A^{k-1}=I_n=A^{k-1}\cdot A$. Από τον ορισμό έπεται ότι ο A: αντιστρέψιμος και $A^{-1}=A^{k-1}$

② I_n: αντιστρέψιμος και $I_n^{-1} = I_n$ διότι $I_n \cdot I_n = I_n = I_n \cdot I_n$

③ Ο μηδενικός πίνακας δεν είναι ποτέ αντιστρέψιμος διότι αν ο O ήταν αντιστρέψιμος θα υπήρχε $X \in M_n(\mathbb{K})$: $O \cdot X = I_n = X \cdot O$.
Επειδή $O \cdot X = O$ έπεται ότι $O = I_n$, άτοπο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, ζητάμε αν υπάρχει $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$A \cdot X = I_2 = X \cdot A$

23-10-18

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

① $I_n \xrightarrow{\Gamma_i \mapsto \Gamma_i + \lambda \Gamma_j} E_{ij}(\lambda)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, $\lambda \in \mathbb{K}$
(Αντικατάσταση της i-γραμμής με πολ/σιο της j-γραμμής)

② $I_n \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} E_{ij}$, $1 \le i, j \le n$ (Αντιμετάθεση της i-γραμμής με τη j-γραμμή)

③ $I_n \xrightarrow{\Gamma_i \mapsto \lambda \cdot \Gamma_i} E_i(\lambda)$, $\lambda \ne 0$, $1 \le i \le n$ (Αντικατάσταση μιας γραμμής από αυτή στην οποία έχουμε προσθέσει ένα πολ/σιο της)

- ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

①
$$\begin{array}{r} \\ i\text{-γραμμή} \\ j\text{-γραμμή} \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_i \mapsto \Gamma_i + \lambda \Gamma_j} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E_{ij}(\lambda)$$

②
$$\begin{array}{r} \\ i\text{-γραμμή} \\ j\text{-γραμμή} \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E_{ij}$$

③
$$\begin{array}{r} \\ i\text{-γραμμή} \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_i \to \lambda \cdot \Gamma_i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E_i(\lambda)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

① $E_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_{21}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ αφού $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{21}$

$E_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

② $I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$E_{23}(\lambda) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\lambda\\0&0&1\end{pmatrix}$ $E_2(\lambda) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$E_{13} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Έστω $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ και έστω $1\le i,j\le m$

① $A \xrightarrow{r_i \to r_i+\lambda r_j} E_{ij}(\lambda)\cdot A$

② $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E_{ij}\cdot A$

③ $A \xrightarrow{r_i \to \lambda\cdot r_i} E_i(\lambda)\cdot A$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>. ① $E_{ij}(\lambda)\cdot A = \begin{pmatrix}1&0&\dots&0&\dots&0&\dots&0\\ \vdots&&&&&&&\\ 0&0&\dots&1&\dots&\lambda&\dots&0\\ 0&0&\dots&0&\dots&1&\dots&0\\ 0&0&\dots&0&\dots&0&\dots&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\ \vdots&&&\\ a_{i1}&a_{i2}&\dots&a_{in}\\ a_{j1}&a_{j2}&\dots&a_{jn}\\ a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\ \vdots&&&\\ a_{i1}+\lambda a_{j1}&a_{i2}+\lambda a_{j2}&\dots&a_{in}+\lambda\cdot a_{jn}\\ a_{j1}&a_{j2}&\dots&a_{jn}\\ \vdots&\vdots&&\\ a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}$: έχει προκύψει προσθέτοντας στην r_i, λ φορές την r_j

② $E_{ij}\cdot A = \begin{array}{c}\\ \\ r_j \to\\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&\dots&0&\dots&0&\dots&0\\ 0&\dots&0&\dots&1&\dots&0\\ 0&\dots&1&\dots&0&\dots&0\\ 0&\dots&0&\dots&0&\dots&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ a_{i1}&\dots&a_{in}\\ a_{j1}&\dots&a_{jn}\\ a_{m1}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ a_{j1}&\dots&a_{jn}\\ a_{i1}&\dots&a_{in}\\ a_{m1}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}$: έχει προκύψει με αμοιβαία εναλλαγή των γραμμών r_i, r_j

③ $E_i(\lambda)\cdot A = \begin{pmatrix}1&\dots&0&\dots&0\\ 0&\dots&\lambda&\dots&0\\ 0&\dots&0&\dots&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ a_{i1}&\dots&a_{in}\\ a_{m1}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \lambda a_{i1}&\dots&\lambda a_{in}\\ a_{m1}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}$: έχει προκύψει πολλ/ζοντας την r_i με λ

ΠΡΟΤΑΣΗ: Οι στοιχειώδεις πίνακες: $E_{ij}(\lambda)$, E_{ij}, $E_i(\lambda)$ $\lambda \neq 0$ είναι αντιστρέψιμοι και: $\boxed{E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)}$, $\boxed{E_{ij}^{-1} = E_{ij}}$ $\boxed{E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\lambda^{-1})}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: • Αρκεί να δείξουμε ότι: $E_{ij}(-\lambda) \cdot E_{ij}(\lambda) = I_n = E_{ij}(-\lambda) \cdot E_{ij}(\lambda)$
Από την παραπάνω φράση, ο πίνακας $E_{ij}(-\lambda) \cdot E_{ij}(\lambda)$ προκύπτει από τον $E_{ij}(\lambda)$ προσθέτοντας στην i-γραμμή: $(0 \dots 1 \dots \lambda \dots 0)$ προσθέσαμε
j-στήλη
$-\lambda$ φορές την j-γραμμή $(0 \dots 0 \dots -\lambda \dots 0)$
j-στήλη
Τότε θα έχουμε ότι η i-γραμμή του $E_{ij}(-\lambda) \cdot E_{ij}(\lambda)$ είναι η $(0 \dots 1 \dots 0 \dots 0)$
i-στήλη

Επειδή οι υπόλοιπες γραμμές δεν επηρεάζονται, έπεται ότι
$E_{ij}(-\lambda) \cdot E_{ij}(\lambda) = I_n$
παρόμοια $E_{ij}(\lambda) \cdot E_{ij}(-\lambda) = I_n$. Άρα $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$

- $E_{ij} \cdot E_{ij} = I_n \Rightarrow E_{ij}$ αντιστρέψιμος και $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$

- Παρόμοια $E_i(\lambda^{-1}) \cdot E_i(\lambda) = I_n = E_i(\lambda) \cdot E_i(\lambda^{-1}) \Rightarrow E_i(\lambda)$: αντιστρέψιμος και $E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\lambda^{-1})$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4 \mapsto \Gamma_4 - 5\Gamma_1]{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - 2\Gamma_1,\ \Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - 4\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 7 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 14 & -2 & 4 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \mapsto \Gamma_4 - 2\Gamma_2]{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4]{\Gamma_2 \mapsto \frac{1}{7}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 + 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - \frac{10}{7}\Gamma_3]{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 + \frac{1}{7}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας $m \times n$ πίνακας A καλείται γ-κλιμακωτός $\Longleftrightarrow$

① Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1.

② Οι μηδενικές γραμμές, αν υπάρχουν, εμφανίζονται μετά τις μη μηδενικές.

③ Το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής δηλαδή το 1, βρίσκεται στα δεξιά του πρώτου μη-μηδενικού στοιχείου κάθε προηγούμενης μη-μηδενικής γραμμής.

Ο πίνακας A καλείται ισχυρά γ-κλιμακωτός (ανηγμένος) $\Longleftrightarrow$ ο A: γ-κλιμακωτός και:

④ Τα στοιχεία της στήλης στην οποία βρίσκεται κάθε μη-μηδενικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής, δηλαδή το 1, είναι όλα ίσα με το 0 εκτός φυσικά από το 1.

16-10-18

$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A : \text{αντιστρέψιμος}\}$: γενική γραμμική ομάδα

Παρατηρήσεις

① $GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$ διότι $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$

② Έστω $A \in GL_1(\mathbb{K})$ Τότε $A=(a)$, όπου $a \in \mathbb{K}$ και ο A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \exists A' \in M_1(\mathbb{K})$, άρα $A'=(a')$ όπου $A' \in \mathbb{K}$: $A \cdot A' = I_1 = A' \cdot A \Rightarrow (a)\cdot(a') = (1) = (a')(a) \Rightarrow (a \cdot a') = 1 = (a' \cdot a) \Rightarrow a \cdot a' = 1 = a' \cdot a$, $a \neq 0$, $a' = a^{-1}$

Άρα $A=(a)$ όπου $a \in \mathbb{K}$ με $a \neq 0$

Αντίστροφα, αν $A=(a)$ όπου $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ τότε $A \in GL_1(\mathbb{K})$ Πράγματι αν θέσουμε $A'=(a^{-1}) \in M_1(\mathbb{K})$ τότε, προφανώς $A \cdot A' = (1) = A' \cdot A$

Άρα $GL_1(\mathbb{K}) = \{A=(a) \in M_1(\mathbb{K}) \mid a \neq 0\}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

① $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$ υπάρχει ο αντίστροφος του A^{-1}
Τότε ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$.
Πράγματι: A αντιστρέψιμος $\Rightarrow A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$
Σύμφωνα με τον ορισμό αντιστρέψιμου πίνακα (όταν ο ορισμός εφαρμοσθεί για τον A^{-1}, έπεται ότι ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο $A = (A^{-1})^{-1} = A$

② Έστω $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$. Τότε ορίζεται το γινόμενο $A \cdot B$
A: αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists A^{-1} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$
B: αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists B^{-1} : B \cdot B^{-1} = I_n = B^{-1} \cdot B$
Ζητάμε να προσδιορίσουμε έναν πίνακα X, αν αυτός υπάρχει, έτσι ώστε $(A \cdot B) \cdot X = I_n = X \cdot (A \cdot B)$
Θέτουμε $X = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Τότε:
$(A \cdot B) \cdot X = (A \cdot B) \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$
$X \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A A^{-1}) \cdot A = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$
Άρα ο $A \cdot B$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας $\boxed{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΕΝΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Έστω $A=(a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Για να εξετάσουμε αν ο A είναι αντιστρέψιμος, ψάχνουμε αν υπάρχει πίνακας $X=(x_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$: $A\cdot X = I_n = X\cdot A$. Αυτή η σχέση μας οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα x_{ij} του X και τότε:
αν το σύστημα έχει λύση τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=X$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$. Έστω $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ έτσι ώστε: $A\cdot X = I_2 = X\cdot A$

$$A\cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11}+4x_{21} & x_{12}+4x_{22} \\ 2x_{11} & 2x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{11}+4x_{21}=1 \\ x_{12}+4x_{22}=0 \\ 2x_{11}=0 \\ 2x_{22}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{21}=\frac{1}{4} \\ x_{22}=-\frac{1}{8} \\ x_{11}=0 \\ x_{12}=\frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Οπότε } X=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Άρα A: αντιστρέψιμος και $A^{-1}=X$

ΑΣΚΗΣΗ

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Έστω $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ και υποθέτουμε ότι: $A\cdot X = I_3 = X\cdot A$. Τότε

$$A\cdot X = I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} & x_{13}+x_{23} \\ x_{21}+x_{31} & x_{22}+x_{32} & x_{23}+x_{33} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_{11}+x_{21}=0 \Leftrightarrow \boxed{x_{11}=0}$

$x_{12}+x_{22}=0 \Leftrightarrow \boxed{x_{12}=-1}$

$x_{13}+x_{23}=0 \Leftrightarrow \boxed{x_{13}=1}$

$x_{21}+x_{31}=0 \Leftrightarrow \boxed{x_{21}=0}$

$x_{22}+x_{32}=1 \Leftrightarrow \boxed{x_{22}=1}$

$x_{23}+x_{33}=0 \Leftrightarrow \boxed{x_{23}=-1}$

$\boxed{x_{31}=0}$

$\boxed{x_{32}=0}$

$\boxed{x_{33}=1}$

Οπότε $X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Άρα ο A: αντιστρέψιμος και $A^{-1}=X$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

Έστω $A\in M_n(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι:

$$A^4-A^3+A^2-A+I_n=0$$

Είναι ο A αντιστρέψιμος; Αν ναι $A^{-1}=;$

<u>Λύση</u>

$A^4-A^3+A^2-A+I_n=0 \Leftrightarrow A^4-A^3+A^2-A=-I_n \Leftrightarrow -A^4+A^3-A^2+A=I_n \Rightarrow$

$\Rightarrow A(-A^3+A^2-A+I_n)=I_n=(-A^3+A^2-A+I_n)\cdot A$

Από τον ορισμό A: αντιστρέψιμος και $A^{-1}=-A^3+A^2-A+I_n=-A^4$

$\Rightarrow \boxed{A^{-1}=-A^4}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

Έστω $A=\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{K})$. Τότε νδο:

i) $A^2-(a+\delta)\cdot A+(a\delta-\beta\gamma)\cdot I_2=0$

ii) ο A: αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow a\delta-\beta\gamma\neq 0$

<u>Λύση</u>

i) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+\beta\gamma & a\beta+\beta\delta \\ a\gamma+\delta\gamma & \gamma\beta+\delta^2 \end{pmatrix}$,

$(a+\delta)\cdot A=(a+\delta)\cdot\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+\delta a & a\beta+\delta\beta \\ a\gamma+\gamma\delta & a\delta+\delta^2 \end{pmatrix}$

$(a\delta-b\gamma)I_2=(a\delta-b\gamma)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\delta-b\gamma&0\\0&a\delta-b\gamma\end{pmatrix}$

Τότε $A^2-(a+\delta)\cdot A+(a\delta-b\gamma)\cdot I_2=\begin{pmatrix}\cancel{a^2}+\cancel{b\gamma}-\cancel{a^2}-\cancel{a\delta}+\cancel{a\delta}-\cancel{b\gamma} & \cancel{ab}+\cancel{b\delta}-\cancel{ab}-\cancel{b\delta}\\ \cancel{\gamma a}+\cancel{\delta\gamma}-\cancel{a\gamma}-\cancel{\delta\gamma} & \cancel{\gamma b}+\cancel{\delta^2}-\cancel{a\delta}-\cancel{\delta^2}+\cancel{a\delta}-\cancel{b\gamma}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0$. Άρα δείξαμε ότι $\boxed{A^2-(a+\delta)\cdot A+(a\delta-b\gamma)I_2=0}$ (1)

ii) "$\longleftarrow$" Έστω ότι $a\delta-b\gamma\neq0$

Τότε (1) $\Rightarrow A^2-(a+\delta)\cdot A-(a\delta-b\gamma)I_2 \Leftrightarrow -\frac{1}{a\delta-b\gamma}\left(A^2-(a+\delta)\cdot A\right)=I_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{a\delta-b\gamma}\cdot A\cdot(a+\delta+A)=I_2 \Leftrightarrow A\cdot\left(\frac{a+\delta}{a\delta-b\gamma}I_2-\frac{1}{a\delta-b\gamma}\cdot A\right)=I_2=$

$=\left(\frac{a+\delta}{a\delta-b\gamma}I_2-\frac{1}{a\delta-b\gamma}\cdot A\right)\cdot A \Rightarrow A^{-1}=\frac{a+\delta}{a\delta-b\gamma}\cdot I_2-\frac{1}{a\delta-b\gamma}A$

"$\longrightarrow$" Έστω ότι A: αντιστρέψιμος

Υποθέτουμε ότι $a\delta-b\gamma=0$. Τότε από την σχέση (1) $\Rightarrow A^2-(a+\delta)A=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A^2=(a+\delta)A$. Επειδή A αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ υπάρχει ο A^{-1} και

τότε: $A^2\cdot A^{-1}=(a+\delta)\cdot A\cdot A^{-1}\Rightarrow A=(a+\delta)\cdot I_2\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}a&b\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+\delta&0\\0&a+\delta\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=a+\delta & b=0\\ \gamma=0 & \delta=a+\delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0 & b=0\\ \gamma=0 & \delta=0\end{cases}$

Άτοπο διότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ο μηδενικός πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος. Άρα $a\delta-b\gamma\neq0$

26-10-18

<u>Παράδειγμα</u>

- $\begin{pmatrix}+1&0&-1&2\\0&1&1&3\\0&0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow$ γ-κλιμακωτός αλλά όχι ισχυρά γ-κλιμακωτός
- $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&2\\0&0&0&0\\0&1&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&2\\1&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow$ αυτοί οι πίνακες δεν είναι γ-κλιμακωτοί

Θεώρημα: ...
$\mathbb{K}$. Τότε με εφαρμογή πεπερασμένου πλήθους πράξεων επί των γραμμών του A, ο A μπορεί να μετατραπεί σε: (α) έναν γ-κλιμακωτό πίνακα και (β) έναν ισχυρά γ-κλιμακωτό πίνακα. Επιπλέον ο ισχυρά γ-κλιμακωτός πίνακας του (β) είναι μοναδικός.

Παράδειγμα

- $A=\begin{pmatrix}2&6&10&14\\-1&4&2&0\\1&10&12&14\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_1\to\frac{1}{2}\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&3&5&7\\-1&4&2&0\\1&10&12&14\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\mapsto\Gamma_2+\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&3&5&7\\0&7&7&7\\1&10&12&14\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\Gamma_3\mapsto\Gamma_3-\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&3&5&7\\0&7&7&7\\0&7&7&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&3&5&7\\0&7&7&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\mapsto\frac{1}{7}\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&3&5&7\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=$

$=B$: γ-κλιμακωτός

- $A=\begin{pmatrix}2&6&10&14\\-1&4&2&0\\1&10&12&14\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_1\leftrightarrow\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&10&12&14\\-1&4&2&0\\2&6&10&14\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_3\mapsto\Gamma_3-2\Gamma_1]{\Gamma_2\mapsto\Gamma_2+\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&10&12&14\\0&14&14&14\\0&-14&-14&-14\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\Gamma_3\mapsto\Gamma_3+\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&10&12&14\\0&14&14&14\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\mapsto\frac{1}{14}\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&10&12&14\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\Gamma$: γ-κλιμακωτός

Απόδειξη: Περιγραφή Αλγορίθμου (**Αλγόριθμος Απαλοιφής Gauss**)

- **ΒΗΜΑ ①**: Αν ο πίνακας A είναι (ισχυρά) γ-κλιμακωτός ο αλγόριθμος σταματάει. Αν ο A μηδενικός πίνακας, τότε (ισχυρά) γ-κλιμακωτός κατά σύμβαση.
- **ΒΗΜΑ ②**: Βρίσκουμε το μικρότερο δείκτη j έτσι ώστε η j-στήλη να έχει ένα μη-μηδενικό στοιχείο $a_{ij}\neq 0$ το οποίο βρίσκεται στη i-γραμμή. Τότε: $\Gamma_1\leftrightarrow\Gamma_i$
- **ΒΗΜΑ ③**: Εκτελούμε τη στοιχειώδη πράξη $\Gamma_1\to\frac{1}{a_{ij}}\Gamma_1$
- **ΒΗΜΑ ④**: Αφαιρούμε κατάλληλα πολλαπλάσια της Γ_1 από τις υπόλοιπες γραμμές. Τότε: $\Gamma_i\mapsto\Gamma_i-a_{ij}\Gamma_1,\ i\geq 2$

I LOVE YOU ZERPITSA!

- **ΒΗΜΑ ⑤**: Εκτελούμε τα προηγούμενα βήματα για τις υπόλοιπες γραμμές.
- Μετά την εφαρμογή πεπερασμένου πλήθους βημάτων ①-⑤, ο πίνακας Α θα έρθει σε μια γ-κλιμακωτή μορφή.
- **ΒΗΜΑ ⑥**: Έστω ότι η τελευταία μη-μηδενική γραμμή είναι η Γ_i, και έστω ότι το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της, δηλαδή το 1, είναι στην στήλη s. Εκτελούμε την πράξη: $\Gamma_k \mapsto \Gamma_k - a_{ks}\Gamma_i$, $1\le k\le i-1$ τότε το 1 είναι το μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο στη στήλη στην οποία βρίσκεται.
- Εκτελούμε διαδοχικά το **ΒΗΜΑ ⑥** για τις υπόλοιπες μη-μηδενικές γραμμές, και τότε ο πίνακας στον οποίο καταλήξαμε είναι ισχυρά γ-κλιμακωτός.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, τότε ο Α μετά την εφαρμογή πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του, μεταφέρεται σε έναν μοναδικό ισχυρά γ-κλιμακωτό πίνακα:
$\Gamma(A)$: η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του Α

Ισοδύναμα υπάρχει πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών πινάκων $E_1, E_2, \dots, E_k$ έτσι ώστε: $E_k\cdot\ldots\cdot E_2\cdot E_1\cdot A=\Gamma(A)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_3\mapsto\Gamma_3-\Gamma_1,\ \Gamma_4\mapsto\Gamma_4-\Gamma_3]{\Gamma_2\mapsto\Gamma_1-2\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-5&-6\\0&-1&-2&-5\\0&-1&-3&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_3\mapsto-\Gamma_3,\ \Gamma_4\mapsto-\Gamma_4]{\Gamma_2\mapsto-\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&5&6\\0&1&2&5\\0&1&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_4\mapsto\Gamma_4-\Gamma_3]{\Gamma_3\mapsto\Gamma_3-\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&5&6\\0&0&-3&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\leftrightarrow\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&5&6\\0&0&1&0\\0&0&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_4\mapsto\Gamma_4+3\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&5&6\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_4\mapsto-\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&5&6\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2\mapsto\Gamma_2-6\Gamma_4]{\Gamma_1\mapsto\Gamma_1-4\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&5&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_2\mapsto\Gamma_2-5\Gamma_3]{\Gamma_1\mapsto\Gamma_1-3\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_1\mapsto\Gamma_1-2\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\Gamma(A)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Τότε από τον Αλγόριθμο Απαλοιφής Gauss υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_k$: $E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 \cdot A = \Gamma(A)$

① Αν η τελευταία γραμμή του $\Gamma(A)$ είναι μηδενική τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος

② Αν η τελευταία γραμμή του $\Gamma(A)$ δεν είναι μηδενική τότε είναι η γραμμή $(0\ 0 \dots 0\ 1)$, και επιπλέον $\Gamma(A) = I_n$, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του $A^{-1} = E_k \cdot E_{k-1} \dots E_2 E_1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $E = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1$. Τότε γνωρίζουμε ότι ο E είναι αντιστρέψιμος.

① Έστω ότι η τελευταία γραμμή του $\Gamma(A)$ είναι η μηδενική. Υποθέτουμε ότι ο A: αντιστρέψιμος. Επειδή $E \cdot A = \Gamma(A)$ και οι E, A: αντιστρέψιμοι, έπεται ότι ο $\Gamma(A) = E \cdot A$: αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists\, \Gamma(A)^{-1}: \Gamma(A)^{-1} \cdot \Gamma(A) = I_n = \Gamma(A) \cdot \Gamma(A)^{-1}$
Επειδή η τελευταία γραμμή του $\Gamma(A) \cdot \Gamma(A)^{-1}$ είναι η μηδενική, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι η τελευταία γραμμή του I_n δεν είναι μηδενική. Άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

② Έστω ότι η τελευταία γραμμή του $\Gamma(A)$ δεν είναι η μηδενική και τότε αναγκαστικά: $\Gamma(A) = I_n$
Τότε $E \cdot A = I_n \Rightarrow A = E^{-1}$ αντιστρέψιμος και $A^{-1} = E = E_k \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$

ΒΗΜΑ ①: Θεωρούμε τον $n \times 2n$ πίνακα $(A | I_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 \dots & 0 \\ a_{m1} & & a_{mn} & 0 & 0 \dots & 1 \end{array}\right)$

ΒΗΜΑ ②: Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του $(A | I_n)$ με σκοπό να φέρουμε τον A σε ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή: τότε υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_k$: ο πίνακας $(A | I_n)$ να έρθει σε μορφή $(E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_2 E_1 A | E_k \cdot E_{k-1} \dots E_2 \cdot E_1) = (\Gamma(A) | E_k \dots E_2 E_1)$

ΒΗΜΑ ③: Αν $\Gamma(A) = I_n$, τότε ο A: αντιστρέψιμος και:

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \dots E_1$$

· Αν $\Gamma(A) \neq I_n$, τότε ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}$ Τότε $(A|I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\1&0&3&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3-\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&-2&0&-1&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3+2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&4&-1&2&1\end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \frac{1}{4}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{array}\right)$

$\xrightarrow[\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2-2\Gamma_3]{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1-3\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1+\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}&-\frac{3}{4}\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1-2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{4}\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{array}\right) =$

$=\left(\begin{array}{c|ccc}I_n&\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{4}\\&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{array}\right)$ Άρα σύμφωνα με τον Αλγόριθμο, ο Α: αντιστρέψιμος και $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Αν $A \in M_n(\mathbb{K})$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

① Ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος

② $\Gamma(A)=I_n$

③ Ο πίνακας Α είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

①⇒②. Αν ο Α είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο πίνακας $E \cdot A=\Gamma(A)$ είναι αντιστρέψιμος, και τότε από την <u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>, έπεται ότι $\Gamma(A)=I_n$

②⇒③. Αν $\Gamma(A)=I_n$ τότε $E\,A=I_n \Rightarrow A=E^{-1}$. Επειδή E^{-1}: αντιστρέψιμος, έπεται ότι και ο Α: αντιστρέψιμος και $A^{-1}=(E^{-1})^{-1}=E$

Τέλος $E^{-1}=(E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1)^{-1}=E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1}$: γινόμενο στοιχειωδών πινάκων $\Rightarrow A$: γινόμενο στοιχειωδών πινάκων

③⇒① Επειδή οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, και γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων είναι αντιστρέψιμος πίνακας, έπεται ότι αν $A = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_k$, όπου E_i: στοιχειώδεις, τότε A: αντιστρέψιμος.

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω ότι $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ και ισχύει ότι $A \cdot B = I_n$

Τότε οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι και $B = A^{-1}$.

Αλγόριθμος Απαλοιφής Gauss $\Rightarrow \exists$ στοιχειώδεις πίνακες $E_1, \ldots, E_k$, έτσι ώστε, θέτοντας $E = E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1$: $E \cdot A = \Gamma(A)$. Τότε $E \cdot A \cdot B = E \Rightarrow \Gamma(A) \cdot B = E$

Αν A: όχι αντιστρέψιμος, τότε γνωρίζουμε ότι η τελευταία γραμμή του $\Gamma(A)$ είναι η μηδενική.

Τότε και η τελευταία γραμμή του $\Gamma(A) \cdot B = E$ είναι η μηδενική και αυτό είναι άτοπο διότι ο E: αντιστρέψιμος.

Άρα A: αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists A^{-1}$ και τότε: $B = A^{-1}$: αντιστρέψιμος

- Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ και έστω $\Gamma(A)$: η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το πλήθος των μονάδων που βρίσκονται στην αρχή κάθε μη-μηδενικής γραμμής του $\Gamma(A)$ καλείται <u>βαθμίδα γραμμών</u> του A και συμβολίζεται με $\gamma(A)$.

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Άρα } \gamma(A) = 2$$

30-10-18

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $\gamma(A) \leq m$ (Η βαθμίδα γραμμών του A δεν υπερβαίνει το πλήθος των γραμμών του A)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί η $\gamma(A)$

ΛΥΣΗ
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto -\frac{1}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \mapsto \frac{1}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 - 3\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma(A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{\gamma(A) = 3}$$

και επειδή $\Gamma(A)=I_3 \Rightarrow A$: αντιστρέψιμος

Αν $A\in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Τότε υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1 \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ θέτοντας $P=E_k\cdot E_{k-1}\cdot \dots \cdot E_2\cdot E_1$ έχουμε ότι $\boxed{P\cdot A=\Gamma(A)}$

Έστω S ένα μη-κενό σύνολο. Μία σχέση R στο S είναι ένα υποσύνολο $R\subseteq S\times S=\{(x,y)\mid x,y\in S\}$. Αν $(x,y)\in R$, θα γράφουμε: $x\sim_R y$

Η σχέση R επί του S καλείται σχέση ισοδυναμίας επί του $S \Leftrightarrow$

① $\forall x\in S$: $x\sim_R x$ (ανακλαστική ιδιότητα)

② $\forall x,y\in S$: $x\sim_R y \Leftrightarrow y\sim_R x$ (συμμετρική ιδιότητα)

③ $\forall x,y,z\in S$: $\left.\begin{matrix} x\sim_R y \\ y\sim_R z\end{matrix}\right\} \Rightarrow x\sim_R z$ (μεταβατική ιδιότητα)

Αν $A,B\in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, τότε ορίζουμε:

$A\sim_\gamma B \Leftrightarrow$ ο πίνακας B προκύπτει από τον A μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του A. $\Leftrightarrow$ υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$ μεγέθους $m\times n$, έτσι ώστε θέτοντας $P=E_k\cdot E_{k-1}\cdot\dots\cdot E_2\cdot E_1$ να έχουμε: $P=A\cdot B$

$\Leftrightarrow \exists$ αντιστρέψιμος πίνακας $P\in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$: $P\cdot A=B$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>. ① Η παραπάνω σχέση που ορίσαμε είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

② Αν ισχύει $A\sim_\gamma B \Rightarrow \gamma(A)=\gamma(B)$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: ① • $\forall A\in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$: $A\sim_\gamma A$ διότι: $I_n\cdot A=A$

• Έστω ότι $A\sim_\gamma B$. Τότε $\exists$ αντιστρέψιμος $P\in \mathbb{M}_m(\mathbb{K})$: $P\cdot A=B$

Τότε $P\cdot P^{-1}\cdot A=P^{-1}\cdot B \Rightarrow I_n\cdot A=P^{-1}\cdot B\Rightarrow P^{-1}\cdot B=A\Rightarrow B\sim_\gamma A$

• Έστω ότι: $\left.\begin{matrix} A\sim_\gamma B \Rightarrow \exists \text{ αντιστρέψιμος } P\in \mathbb{M}_m(\mathbb{K}): P\cdot A=B \\ B\sim_\gamma \Gamma \Rightarrow \exists \text{ αντιστρέψιμος } Q\in \mathbb{M}_m(\mathbb{K}): Q\cdot B=\Gamma\end{matrix}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow Q\cdot P\cdot A = Q\cdot B \xrightarrow{Q\cdot B=\Gamma} (Q\cdot P)\cdot A = \Gamma$. επειδή $Q\cdot P$ αντιστρέψιμος $\Rightarrow A \sim_\gamma \Gamma$

② Έστω ότι $A \sim_\gamma B$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_m(\mathbb{K})$: $P\cdot A = B$. (1)

Όμως $A \sim_\gamma \Gamma(A)$, διότι $\exists$ αντιστρέψιμος $X \in M_m(\mathbb{K})$: $X\cdot A = \Gamma(A)$ (2)

$B \sim_\gamma \Gamma(A)$, διότι $\exists$ αντιστρέψιμος $Y \in M_m(\mathbb{K})$: $Y\cdot B = \Gamma(B)$ (3)

$PA = B \xrightarrow{(3)} Y\cdot P\cdot A = Y\cdot B = \Gamma(B) \Rightarrow A = (Y\cdot P)^{-1}\cdot \Gamma(B) \xrightarrow{(2)} X\cdot A = X\cdot (Y\cdot P)^{-1}\cdot \Gamma(B)$

$\Rightarrow \Gamma(A) = X\cdot (Y\cdot P)^{-1}\cdot \Gamma(B) \Rightarrow [X\cdot (YP)^{-1}]^{-1}\cdot \Gamma(A) = \Gamma(B)$.

Θέτοντας $R = (X\cdot (Y\cdot P)^{-1})^{-1}$ έπεται ότι R: αντιστρέψιμος και: $R\cdot \Gamma(A) = \Gamma(B)$

Τότε ο $\Gamma(B)$ προκύπτει μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του $\Gamma(A)$. Τόσες όσες μηδενικές γραμμ έχει ~~και~~ ο $\Gamma(A)$ τόσες έχει και ο $\Gamma(B)$.

Άρα: πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $\Gamma(A)$ = πλήθος μη-μηδενικών γραμμών του $\Gamma(B)$. Επομένως: $\gamma(A) = \gamma(B)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $A \in M_n(\mathbb{K})$, τότε A: αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \Gamma(A) = I_n \Leftrightarrow \gamma(A) = n$

ΒΑΘΜΙΔΑ ΣΤΗΛΩΝ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Έστω $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ οι στήλες του A.

- Στοιχειώδεις πράξεις

① $A \xrightarrow{\Sigma_i \mapsto \Sigma_i + \lambda\cdot \Sigma_j} A' = A\cdot {}^tE_{ij}(\lambda)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \lambda & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = {}^tE_{ij}(\lambda)$$

② $A \xrightarrow{\Sigma_i \leftrightarrow \Sigma_j} A' = A\cdot E_{ij}$

③ $A \xrightarrow[\lambda\neq 0]{\Sigma_i \mapsto \lambda\Sigma_i} A' = A\cdot E_i(\lambda)$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις στήλες του, μπορεί να μεταφραστεί σε έναν πίνακα $\Sigma(A)$ ο οποίος έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Οι μηδενικές στήλες του $\Sigma(A)$ εμφανίζονται στο τέλος προς τα δεξιά.
2. Το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής στήλης είναι το 1.
3. Το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής στήλης, δηλαδή το 1, βρίσκεται στα δεξιά από το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της προηγούμενης από τα αριστερά στήλης.
4. Το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής στήλης, δηλαδή το 1 είναι το μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο στην αντίστοιχη γραμμή.

Ο πίνακας $\Sigma(A)$ είναι μοναδικός και καλείται η <u>ισχυρά σ-κλιμακωτή μορφή</u> του A.

<u>ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ</u>: Για κάθε $A \in M_{m\times n}(K)$ υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k \in M_n(K)$ έτσι ώστε θέτοντας $Q = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_k$, να έχουμε: $\boxed{A \cdot Q = \Sigma(A)}$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Η βαθμίδα στηλών $\sigma(A)$ του A ορίζεται να είναι το πλήθος των μη-μηδενικών του $\Sigma(A)$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Ορίζοντας στο σύνολο $M_{m\times n}(K)$ τη σχέση:
$\forall A, B \in M_{m\times n}(K): A \sim_\sigma B \Leftrightarrow$ ο B προκύπτει από τον A μετά την εκτέλεση πεπ/νου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις στήλες του A
$\Leftrightarrow \exists$ αντιστρέψιμος $Q \in M_n(K): A \cdot Q = B$
τότε η σχέση αυτή είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο $M_{m\times n}(K)$.
Επιπλέον: $A \sim_\sigma B \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B)$

$A \in M_{m\times n}(K)$. Τότε: $\exists$ αντιστρέψιμος $P \in M_{m\times n}(K)$: $P \cdot A = \Gamma(A)$. Τότε επίσης υπάρχει αντιστρέψιμος $Q \in M_n(K)$: $\Gamma(A) \cdot Q = \Sigma(\Gamma(A)) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ για κάθε $A \in M_{m\times n}(K)$, $\exists$ αντιστρέψιμος $P \in M_m(K)$, και αντιστρέψιμος $Q \in M_n(K)$: $P \cdot A \cdot Q = \Sigma(\Gamma(A))$
Ο πίνακας $\Sigma(\Gamma(A))$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\ \vdots&&\ddots&\vdots\\ 0&0&\dots&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&\dots&0\\ \vdots&&\vdots\\0&\dots&0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&\dots&0\\ \vdots&&\vdots\\0&\dots&0\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0\\0&0\end{pmatrix}, \text{ όπου } r=\gamma(A)=\sigma(A)$$

- Η κοινή τιμή $\gamma(A)=\sigma(A)$ καλείται απλά η βαθμίδα του A και συμβολίζεται με: $r(A)$
- Ο πίνακας $\begin{pmatrix} I_r & 0\\0&0\end{pmatrix}$ καλείται η κανονική μορφή του A.

Έστω $A,B\in M_{m\times n}(K)$ 2-11-18

$A \underset{\gamma}{\sim} B \Leftrightarrow \exists$ αντιστρέψιμος πίνακας $P\in M_m(K): P\cdot A=B$

$A \underset{\sigma}{\sim} B \Leftrightarrow \exists$ αντιστρέψιμος πίνακας $Q\in M_n(K): A\cdot Q=B$

$A \sim B \Leftrightarrow \exists$ αντιστρέψιμος πίνακας $P\in M_m(K)$, $\exists$ αντιστρέψιμος πίνακας $Q\in M_n(K)$ $: P\cdot A\cdot Q=B$

- $\forall A\in M_{m\times n}(K): A \underset{\gamma}{\sim} \Gamma(A)$
- $\forall A\in M_{m\times n}(K): A \underset{\sigma}{\sim} \Sigma(A)$
- $\forall A\in M_{m\times n}(K): A \sim K(A)$: ισχυρά γ-κλιμακωτή και σ-κλιμακωτή μορφή του A

Το πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών του $\Gamma(A)$: βαθμίδα γραμμών του $A=\gamma(A)$

Το πλήθος των μη-μηδενικών στηλών $\Sigma(A)$: βαθμίδα στηλών του $A=\sigma(A)$

Το πλήθος των ~~γρα~~ μη-μηδενικών γραμμών ή στηλών του $K(A)$: βαθμίδα του $A=r(A)$.

Τότε: $r(A)=\gamma(A)=\sigma(A)$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&\dots&0&0&\dots&0\\ 0&1&\dots&0&0&\dots&0\\ \vdots&&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\dots&1&0&\dots&0\\ \hline 0&0&\dots&0&0&\dots&0\\ \vdots&&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\dots&0&0&\dots&0\end{array}\right) = \Sigma(\Gamma(A))$$

: <u>κανονική</u> <u>μορφή</u> του A

ΑΣΚΗΣΗ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 10 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A)=; \\ \kappa(A)=; \end{matrix}$$

ΛΥΣΗ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 10 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_4 \mapsto r_4-4r_1 \\ r_5 \mapsto r_5-5r_1}]{\substack{r_2 \mapsto r_2-2r_1 \\ r_3 \mapsto r_3-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & +1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -11 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & -10 & -22 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_5 \mapsto r_5-2r_3]{r_4 \mapsto r_4-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \mapsto -r_3]{r_2 \mapsto -r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \mapsto r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & +1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \mapsto r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Τότε $r(A)=\gamma(A)=3$

$$k(A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Gamma(A) \xrightarrow[\Sigma_6 \mapsto \Sigma_6 + 7\Sigma_1]{\Sigma_5 \mapsto \Sigma_5 - 4\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Sigma_6 \mapsto \Sigma_6 - 7\Sigma_2]{\substack{\Sigma_4 \mapsto \Sigma_4 + \Sigma_2 \\ \Sigma_5 \mapsto \Sigma_5 + 10\Sigma_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Sigma_6 \mapsto \Sigma_6 + 2\Sigma_3]{\substack{\Sigma_4 \mapsto \Sigma_4 - 2\Sigma_3 \\ \Sigma_5 \mapsto \Sigma_5 - 7\Sigma_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ: $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ Ν.δ.ο.

① $r(A) = m \iff \exists\, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) : A \cdot B = I_m$

② $r(A) = n \iff \exists\, C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})\ C \cdot A = I_n$

ΛΥΣΗ

① "$\Rightarrow$" Έστω ότι $r(A) = m$.

$$\Gamma(A) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{1m+1} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{2m+1} & & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{mm+1} & & x_{mn} \end{array}\right) \quad \text{Έστω } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Προφανώς θα έχουμε $\Gamma(A) \cdot X = I_m \Rightarrow P \cdot A \cdot X = I_m \Rightarrow$
$\Rightarrow A \cdot X = P^{-1} \Rightarrow A \cdot X \cdot P = I_m$. Θέτουμε $B = X \cdot P$ και τότε: $A \cdot B = I_m$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $\exists B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : A\cdot B = I_m \Rightarrow PA\cdot B = P \Rightarrow \Gamma(A)\cdot B = P \Rightarrow$
$\Rightarrow \Gamma(A)\cdot B \cdot P^{-1} = I_m$ (Ο $\Gamma(A)$ δεν έχει καμία μηδενική γραμμή διότι διαφορετικά, αν η i-γραμμή του $\Gamma(A)$ ήταν η μηδενική, τότε και η i-γραμμή του γινομένου $\Gamma(A)\cdot B\cdot P^{-1} = I_n$ θα ήταν μηδενική: άτοπο
Άρα $r(A) = \gamma(A) = m$ { $r(A) = r({}^tA)$, διότι: $r(A) = \gamma(A) = 6(A)$ και $\gamma({}^tA) = 6(A)$ }

② Έστω ο ανάστροφος ${}^tA \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ και τότε: $r(A) = n \Leftrightarrow r({}^tA) = n$
Άρα από ①: $\exists B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : {}^tA\cdot B = I_n \Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
${}^tB\cdot A = I_n$, και άρα θέτοντας $C = {}^tB$, θα έχουμε:
$r(A) = n \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : C\cdot A = I_n$

ΑΣΚΗΣΗ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 4}(\mathbb{K}),\ a \in \mathbb{K}$$

$r(A) = ;$, $K(A) = ;$, Να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in \mathbb{M}_3(\mathbb{K})$, $Q \in \mathbb{M}_4(\mathbb{K}) : P\cdot A\cdot Q = K(A)$

Λύση

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 + \Gamma_1 \\ E_{31}(1)\cdot E_{21}(-2)}]{\Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & a+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-1)]{\Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a+7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_2(\frac{1}{5})]{\Gamma_2 \mapsto \frac{1}{5}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & a+7 \end{pmatrix}$$

Περιπτώσεις

① $a+7=0$ δηλ. $\boxed{a=-7}$ Τότε: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}(1)]{\Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$

Θέτουμε: $\boxed{P = E_{12}(1)\cdot E_2(\tfrac{1}{5})\cdot E_{32}(-1)\cdot E_{31}(1)\cdot E_{21}(-2)}$

Από τη μορφή του $\Gamma(A)$, έπεται ότι: $r(A) = 2 = \gamma(A) \Rightarrow K(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Gamma(A) \xrightarrow[{}^t E_{21}(-2)]{\Sigma_2 \mapsto \Sigma_2 - 2\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[{}^t E_{41}(-\frac{17}{5})]{\Sigma_4 \mapsto \Sigma_4 - \frac{17}{5}\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{}^t E_{43}(\frac{3}{5})]{\Sigma_4 \mapsto \Sigma_4 + \frac{3}{5}\Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[{}^t E_{23}]{\Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K(A)$$

Θέτοντας $Q = {}^t E_{21}(-2) \cdot {}^t E_{41}(-\frac{17}{5}) \cdot {}^t E_{43}(\frac{3}{5}) \cdot {}^t E_{23}$

Τότε $PQ = K(A)$

② Αν $a+7 \neq 0$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

$$(\Sigma) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_m \end{cases}$$

(Σ): σύστημα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους: $x_1, x_2, \dots, x_n$, κα[ι]
όπου $a_{ij} \in \mathbb{K}$ και $b_i \in \mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$: πίνακας συντελεστών του (Σ)

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ πίνακας αγνώστων του (Σ), $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ πίνακας σταθερών όρων του (Σ)

$B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

Τότε το (Σ) γράφεται $\boxed{A \cdot X = B}$

$\Lambda(\Sigma) = \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}) \mid A\cdot X = B\}$: σύνολο λύσεων του (Σ).

• Το (Σ) καλείται συμβιβαστό $\Leftrightarrow \Lambda(\Sigma) \neq \emptyset$, δηλαδή το (Σ) έχει τουλάχιστον μία λύση

• Το (Σ) : ασυμβίβαστο ή αδύνατο $\Leftrightarrow \Lambda(\Sigma) = \emptyset$

• Το (Σ) : ομογενές $\Leftrightarrow B = 0$, δηλαδή $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$

Παρατήρηση: Κάθε ομογενές σύστημα είναι συμβιβαστό (διότι πάντα έχει η μηδενική λύση $X = 0$)

Αν $(\Sigma') : A'\cdot X = B'$ είναι ένα άλλο γραμμικό σύστημα, όπου $A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B' \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$, $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$

Τα γραμμικά συστήματα $(\Sigma), (\Sigma')$ καλούνται ισοδύναμα $\Leftrightarrow \Lambda(\Sigma) = \Lambda(\Sigma')$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $(\Sigma): A\cdot X = B$, όπου $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$, $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$

Ο επαυξημένος πίνακας του (Σ) ορίζεται να είναι ο $m\times(n+1)$ πίνακας

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Έστω $\Gamma(A)$: η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $m\times m$ πίνακας $P : P\cdot A = \Gamma(A)$. Τότε $A\cdot X = B \Rightarrow P\cdot A\cdot X = P\cdot B \Rightarrow$
$\Rightarrow \Gamma(A)\cdot X = B'$, όπου $B' = P\cdot B$. Τότε το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με το $(\Sigma') : \Gamma(A)\cdot X = B'$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: • Έστω $X \in \Lambda(\Sigma) \Rightarrow A\cdot X = B \Rightarrow P\cdot A\cdot X = P\cdot B \Rightarrow \Gamma(A)\cdot X = B' \Rightarrow$
$\Rightarrow X \in \Lambda(\Sigma')$. Άρα $\Lambda(\Sigma) \subseteq \Lambda(\Sigma')$ (1)

• Έστω $X \in \Lambda(\Sigma') \Rightarrow \Gamma(A)\cdot X = B' \Rightarrow P\cdot A\cdot X = P\cdot B \xRightarrow{P \text{ αντιστρέψιμος}}$
$\Rightarrow A\cdot X = B \Rightarrow X \in \Lambda(\Sigma)$. Άρα $\Lambda(\Sigma') \subseteq \Lambda(\Sigma)$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow \Lambda(\Sigma) = \Lambda(\Sigma') \Rightarrow (\Sigma), (\Sigma')$ ισοδύναμα

$(A|B) \xrightarrow{\text{γραμμοπράξεις}} (\Gamma(A)|B')$: όπου $\boxed{B' = P\cdot B}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$(\Sigma): \begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \end{cases}$$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3\mapsto\Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2\mapsto\Gamma_2-2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3\mapsto\frac{1}{4}\Gamma_3]{\Gamma_2\mapsto-\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2\mapsto\Gamma_2+4\Gamma_3]{\Gamma_1\mapsto\Gamma_1-\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1\mapsto\Gamma_1-\Gamma_3} \Big(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{\Gamma(A)} \Big| \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}}_{B'}\Big)$$

$: \Gamma(A)\cdot X = B' \Rightarrow$ ⇒ η μοναδική λύση του (Σ'), άρα και του (Σ) είναι $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ

$$(\Sigma)\ \lambda\in\mathbb{R} \begin{cases} x-y+z=3 \\ x+y+\lambda z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \end{cases}$$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3\mapsto\Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2\mapsto\Gamma_2-\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & \lambda-2 \end{array}\right)$$

Περιπτώσεις

1) $\lambda+1=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=-1}$ τότε: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$: επαυξημένος πίνακας του:

$$\begin{cases} x-y+z=3 \\ 0\cdot x+2y-2z=-2 \\ 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=-4 \end{cases}$$ (Αδύνατο)

2) $\lambda+1\neq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda\neq-1}$ τότε: $\xrightarrow{\Gamma_3\mapsto\frac{1}{\lambda+1}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2\mapsto\Gamma_2-2\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -4\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \end{array}\right)$

i) $\lambda-1=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=1}$ τότε: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\Gamma_1\mapsto\Gamma_1+\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$: επαυξημένος πίνακας $\begin{cases} x+z=2 \\ y=-1 \end{cases}$ θέτουμε $z=\kappa\in\mathbb{R}$ τότε $\boxed{x=2-\kappa}$ $\boxed{y=-1}$

Άρα Γενική λύση: $X=\begin{pmatrix} 2-\kappa \\ -1 \\ \kappa \end{pmatrix}$, $\forall \kappa \in \mathbb{K}$

ii) $\lambda-1\neq 0$, δηλ. $\lambda\neq 1$. Τότε: $\xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 \frac{1}{\lambda-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{\lambda+1} \end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{4\lambda}{\lambda+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{\lambda+1} \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{\lambda+1} \end{array}\right)$

Γενική λύση: $X=\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \\ -\frac{4}{\lambda+1} \end{pmatrix}$

6-11-19

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

- η εξίσωση $a\cdot x=b$ έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow a\neq 0$

- Θεωρούμε το σύστημα: $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_2+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$ (Σ)

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Έστω ότι $a_{11}\neq 0$. Τότε $A \xrightarrow{r_1 \mapsto \frac{1}{a_{11}} r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - a_{21} r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{21}} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix}$

Αν $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, τότε: $\xrightarrow{r_2 \mapsto \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} r_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση. Αντίστροφα αν το (Σ) έχει μοναδική λύση τότε $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$

Έστω $A \in M_n(K)$

- Αν $n=1$, δηλαδή $A=(a)$ τότε αντιστοιχούμε στον πίνακα A τον αριθμό a.
- Αν $n=2$, δηλαδή $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ τότε αντιστοιχούμε στον πίνακα A τον αριθμό: $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

Παρατηρούμε ότι: $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$

- Αν $n=3$, δηλαδή $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$: $a_{11}(a_{22}\cdot a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{21}(a_{12}a_{33}\cdot a_{32}\cdot a_{13})+$ $+a_{31}(a_{12}\cdot a_{23}-a_{22}\cdot a_{13})$

Έστω $A=(a_{ij})\in M_n(K)$. Θέλουμε να αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό $|A|$ ή $Det(A)$ έτσι ώστε ο αριθμός αυτός να μας δίνει όσο γίνεται περισσότερες πληροφορίες για τον πίνακα A. Δηλαδή θέλουμε να ορίσουμε μία απεικόνιση $f: M_n(K) \to K$, $A \mapsto f(A)=|A|$

Η απεικόνιση αυτή ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

- Αν $n=1$ τότε $A=(a)$. Ορίζουμε $|A|=a$
- Αν $n=2$ τότε $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Ορίζουμε $|A|=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}a_{21}$
- <u>Επαγωγική Υπόθεση</u>: Γνωρίζουμε πώς ορίζεται η απεικόνιση αυτή όταν $n=k$.

Τότε αν $A=(a_{ij})\in M_n(K)$, όπου $n=k+1$, ορίζουμε:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1\,n} \end{vmatrix}$$

Τότε η απεικόνιση ορίζεται, $\forall n \geq 1$. Η απεικόνιση αυτή καλείται απεικόνιση ορίζουσας.

Έτσι από εδώ και στο εξής: ο αριθμός $|A|$ καλείται η ορίζουσα του A ή ανάπτυγμα της ορίζουσας του A κατά τα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ τότε } |A| = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}) - a_{21}(a_{12}\cdot a_{33} - a_{13}a_{32}) +$$
$$+ a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}\cdot a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}\cdot a_{13}\cdot a_{32} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} - a_{11}\cdot a_{23}a_{32} - a_{21}\cdot a_{12}a_{33} - a_{31}\cdot a_{13}a_{22}$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

① Έστω $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Τότε $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - (-1)\cdot 2 = 6$

② Έστω $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 12+(-2)(6) - 2 + 4 = 12 - 12 + 2 = 2$$

Ανάπτυγμα ορίζουσας του A κατά τα στοιχεία της $2^{ης}$ στήλης =

$$= a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}\cdot a_{31}) - a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}\cdot a_{13}) + a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) =$$

$$= a_{12}a_{21}a_{33} + a_{22}\cdot a_{31}\cdot a_{13} + a_{32}\cdot a_{11}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{22}a_{11}a_{33} - a_{32}a_{13}a_{21}$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω $A \in M_n(K)$ και

$$A = (a_{ij}) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i\text{-γραμμή} \\ \\ \end{array} \\ \uparrow j\text{-στήλη} & \end{array}$$

Διαγράφοντας την i-γραμμή του πίνακα A και την j-στήλη του A προκύπτει ένας $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας, του οποίου την ορίζουσα συμβολίζουμε με: Δ_{ij}.

Ο αριθμός Δ_{ij} καλείται <u>ελάσσονα ορίζουσα</u> τάξης $n-1$, του A η οποία αντιστοιχεί στο στοιχείο a_{ij}. Ο αριθμός $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ καλείται ο <u>συμπαράγοντας</u> του στοιχείου a_{ij} και συμβολίζεται με: $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}}$

Τότε: $\boxed{|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1}}$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας του A κατά τα στοιχεία της j-στήλης =
$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$ $\quad \forall j = 1,2,\dots,n$

Ανάπτυγμα της ορίζουσας του A κατά τα στοιχεία της i-γραμμής =
$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ $\quad \forall i = 1,2,\dots,n$

ΘΕΩΡΗΜΑ: $\forall i,j = 1,2,\dots,n$: $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} =$
$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$

Η κοινή αυτή τιμή είναι η ορίζουσα του **A**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\begin{vmatrix} \overset{(a_{11})}{1} & \overset{(a_{12})}{0} & \overset{(a_{13})}{2} \\ \overset{(a_{21})}{3} & \overset{(a_{22})}{-1} & \overset{(a_{23})}{4} \\ \overset{(a_{31})}{1} & \overset{(a_{32})}{0} & \overset{(a_{33})}{5} \end{vmatrix} = \cancelto{0}{(-1)^{1+2}\, 0 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}} + (-1)^{2+2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \cancelto{0}{(-1)^{2+3}\, 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} =$$
$$= -(5-2) = -3$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

① Αν $O \in M_n(K)$ είναι ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας τότε $|O| = 0$

② Αν ο A έχει μια μηδενική γραμμή ή μια μηδενική στήλη τότε $|A| = 0$

③ Αν ο $A = I_n$ είναι ο μοναδιαίος τότε: $|A| = |I_n| = 1$, διότι:
- αν $n=1$ τότε $I_1 = (1)$ και $|I_1| = 1$
- αν $n=2$ τότε $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $|I_2| = 1$

Επαγωγική υπόθεση: $|I_n| = 1$

Θ.δ.ο. $|I_{n+1}| = 1$

$$|I_{n+1}| = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}}_{(n+1)\times(n+1)} = 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}}_{n \times n} = 1 \cdot |I_n| \overset{\text{επαγωγική υπόθεση}}{=} 1$$

④ Αν $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$ τότε $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$ (Διαγώνιος) διότι:

$-n=1 \Rightarrow A=(\lambda)$ και άρα $|A|=\lambda=\lambda^1$

$-n=2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

<u>Επαγωγική υπόθεση</u>: $\begin{vmatrix}\lambda & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & \dots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^n$. <u>Θ.δ.ο.</u> $\begin{vmatrix}\lambda & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & \dots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n+1}$

Θα έχουμε: $\underbrace{\begin{vmatrix}\lambda & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda\end{vmatrix}}_{(n+1)\times(n+1)}=\lambda\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}\lambda & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda\end{vmatrix}}_{n\times n}=\lambda\cdot\lambda^n=\lambda^{n+1}$

(5) $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n$ (Διαγώνιος)

<u>9-11-18</u>

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots\ 0 & a_{nn}\end{vmatrix} \overset{(*)}{=} a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$

$\cdot n=1$, $A=(a_{11})$ και τότε $|A|=a_{11}$

$\cdot n=2$, $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}$

· <u>Επαγωγική Υπόθεση</u>: Η ορίζουσα ενός $(n-1)\times(n-1)$ <u>άνω</u> <u>τριγωνικού</u> πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων.

$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & \dots & a_{2n}\\ 0\ a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & & \vdots\\ 0\ 0 & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} \overset{\text{Επαγ. Υπ. Θ}}{=} a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$

Αν πάρουμε έναν κάτω τριγωνικό πίνακα τότε θα ισχύει:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

① $E_{ij}(\lambda) = \begin{array}{r} \\ r_i \rightarrow \\ r_j \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{pmatrix}$ Τότε: $|E_{ij}(\lambda)| = 1$ διότι ο $E_{ij}(\lambda)$ είναι άνω τριγωνικός.

② $E_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda \neq 0)$ Τότε $|E_i(\lambda)| = \lambda$, διότι ο $E_i(\lambda)$ είναι διαγώνιος.

③ $E_{ij} =$ $(i \neq j)$ $\begin{array}{r} \\ r_i \rightarrow \\ r_j \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ

$\forall n \geq 2, \; |E_{ij}| = -1$

· $n=2$: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow |E_{12}| = -1 = |E_{21}|$

· Επαγωγική Υπόθεση: Η ορίζουσα του $(n-1)\times(n-1)$ πίνακα E_{ij} είναι ίση με -1, αν $n \geq 3$

Τότε έστω ο $n\times n$ πίνακας $E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ Τότε:

$$|E_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Επαγ. Υποθ.}}{=} -1$$

$(n-1)\times(n-1) \rightarrow$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

① ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΙΣ ΣΤΗΛΕΣ

(a) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+a_{1j}' & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+a_{nj}' & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}' & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}' & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(b) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Απόδειξη

(a) Ανάπτυγμα ορίζουσας κατά τα στοιχεία της j-στήλης: $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+a_{1j}' & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+a_{nj}' & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$

$$=(a_{1j}+a_{1j}')A_{1j}+\dots+(a_{nj}+a_{nj}')A_{nj}=$$

$$=(a_{1j}A_{1j}+\dots+a_{nj}A_{nj})+(a_{1j}'A_{1j}+\dots+a_{nj}'A_{nj}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}' & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}' & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(b) Ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της j-στήλης:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda a_{1j}A_{1j}+\dots+\lambda a_{nj}A_{nj} = \lambda(a_{1j}A_{1j}+\dots+a_{nj}A_{nj}) =$$

$$= \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

② Αν ο πίνακας A έχει μια μηδενική στήλη, τότε $|A|=0$

Αυτό προκύπτει από το (1b) θέτοντας $\lambda=0$

③ $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

Προκύπτει με διαδοχική εφαρμογή της (1b)

④ Αν ο A έχει δύο στήλες ίσες, τότε $|A|=0$ (Απόδειξη ΣΠΙΤΙ)

{Υπόδειξη

{Δείχνω πρώτα ότι $|A|=0$, αν ο A έχει δύο διαδοχικές στήλες ίσες}

⑤ Αν εναλλάξουμε αμοιβαία $\boxed{\text{δύο}}$ $\boxed{\text{στήλες}}$ του Α, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο

i-στήλη j-στήλη $\qquad\qquad\qquad\qquad$ i-στήλη j-στήλη

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1i} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{ni} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{ni} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1i} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \; a_{nj} \dots a_{ni} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j}+a_{1i} \dots a_{1i} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nj}+a_{ni} \dots a_{ni} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j}+a_{1i} \dots a_{1i}-a_{1j}-a_{1i} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nj}+a_{ni} \dots a_{ni}-a_{nj}-a_{ni} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

i-στήλη j-στήλη $\qquad$ i-στήλη j-στήλη $\qquad$ i-στήλη j-στήλη

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j}+a_{1i} \dots -a_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nj}+a_{ni} \dots -a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i} \dots -a_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{ni} \dots -a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

i-στήλη j-στήλη

$$= - \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{ni} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{ni} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

⑥ Η ορίζουσα ενός πίνακα Α δεν αλλάζει αν $\boxed{\text{μια στήλη αντικατασταθεί}}$ με το $\boxed{\text{άθροισμά της με πολλαπλάσιο άλλης στήλης.}}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i}+\lambda a_{1j} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{ni}+\lambda a_{nj} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{ni} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

i-στήλη j-στήλη $\qquad\qquad$ i-στήλη j-στήλη

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i}+\lambda a_{1j} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \dots a_{ni}+\lambda a_{nj} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της i-στήλης

$$= (a_{1i}+\lambda a_{1j})A_{1i} + \dots + (a_{ni}+\lambda a_{nj})A_{ni} = (a_{1i}A_{1i} + \dots + a_{ni}A_{ni}) + \lambda(a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{nj}A_{nj})$$

Όμως $a_{1i}A_{1i} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nj} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = 0$

i-στήλη j-στήλη

$= a_{1i}A_{1i} + \dots + a_{ni}A_{ni} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{ni} \dots a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$

(7) $|A| = |{}^tA|$

$|A| = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$ → ανάπτυγμα της ορίζουσας του A κατά τα στοιχεία της j-στήλης.
→ ανάπτυγμα ορίζουσας του ${}^tA$ κατά τα στοιχεία της j-γραμμής

Άρα $|A| = |{}^tA|$

Από την (7) έπεται ότι όλες οι προηγούμενες ιδιότητες ισχύουν και για γραμμές.

1) $A \xrightarrow{r_i \mapsto r_i + \lambda r_j} A' = E_{ij}(\lambda)\cdot A \Longrightarrow |A| = |A'| = |E_{ij}(\lambda)|\,|A|$

2) $A \xrightarrow{r_i \mapsto \lambda \cdot r_i} A' = E_i(\lambda)\cdot A \Rightarrow |A'| = \lambda|A| = |E_i(\lambda)|\cdot|A|$
$\lambda \neq 0$

3) $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} A' = E_{ij}\cdot A \Rightarrow |A'| = -|A| \Rightarrow |E_{ij} A| = |E_{ij}|\cdot|A| = -|A|$

Οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν και για στήλες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

(1) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = d\cdot c \begin{vmatrix} a & 3 \\ 0 & b \end{vmatrix} = d\cdot c\cdot a\cdot b = a\cdot b\cdot c\cdot d$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 4 & 5 \end{vmatrix} = -d\cdot c \begin{vmatrix} 2 & a \\ b & 0 \end{vmatrix} = -d\cdot c(-ab) = a\cdot b\cdot c\cdot d$

ΣΧΟΛΙΟ: $A = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Κανόνας **Sarrus** (μόνο για ορίζουσες πινάκων 3x3)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 \mapsto r_4 - 3r_1]{r_2 \mapsto r_2 + 4r_1,\ r_3 \mapsto r_3 - r_1} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$= + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & +2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & 5 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 \mapsto r_3 - 2r_1]{r_2 \mapsto r_2 + r_3} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-30-4) = -68$$

ΑΣΚΗΣΗ SOS

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-} & x \end{vmatrix} \quad a_1, a_2, \dots, a_n, x \in \mathbb{K} \quad \xrightarrow{\sigma_1 \mapsto \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n}$$

$$= \begin{vmatrix} x+a_1+\dots+a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ x+a_1+\dots+a_n & x & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & & & \\ x+a_1+\dots+a_n & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix} = (x+a_1+a_2+\dots+a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & x \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow{r_{i+1} \mapsto r_{i+1} - r_i} (x+a_1+a_2+\dots+a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x-a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2-x & x-a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \end{vmatrix} =$$

$$= (x+a_1+a_2+\dots+a_n)\cdot\begin{vmatrix} x-a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & x-a_n \end{vmatrix} = (x+a_1+\dots+a_n)\cdot(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \ni A_n$$

$$|A_n| = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2|A_{n-1}| - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}_{(n-2)\times(n-2)} = 2|A_{n-1}| - |A_{n-2}|.$$

Άρα $\boxed{|A_n| = 2|A_{n-1}| - |A_{n-2}|}$

$n=1 \Rightarrow A_1 = (2) \Rightarrow |A_1| = 2$

$n=2 \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_2| = 3$

$n=3 \Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_3| = 4$

<u>Θδο</u> $|A_n| = n+1$ (*)

Ο (*) ισχύει για $n=1,2,3$

<u>Επαγωγική Υπόθεση</u>:

Ο τύπος (*) ισχύει $\forall k<n$.

$|A_k| = k+1, \forall k<n$

$$|A_n| = 2|A_{n-1}| - |A_{n-2}| \overset{\text{Επαγ. Υποθ.}}{=} 2\cdot(n-1+1) - (n-2+1) = 2n-(n-1) = 2n-n+1 = n+1$$

Άρα: $|A_n| = n+1, \forall n \geq 1$

13-11-18

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Έστω E στοιχειώδης $n\times n$ πίνακας και $B\in M_n(\mathbb{K})$. Τότε:

$$|E\cdot B| = |E|\cdot|B|$$

<u>Απόδειξη</u>: $E = E_{ij}(\lambda), E_i(\lambda), E_{ij}$ και $|E_{ij}(\lambda)| = 1$, $|E_i(\lambda)| = \lambda$, $|E_{ij}| = -1$

- Αν $E = E_{ij}(\lambda)$, τότε $|E\cdot B| = |E_{ij}(\lambda)\cdot B| = |B| = 1\cdot|B| = |E_{ij}(\lambda)|\cdot|B| = |E|\cdot|B|$
- Αν $E = E_i(\lambda)$, τότε: $|E\cdot B| = |E_i(\lambda)\cdot B| = \lambda\cdot|B| = |E_i(\lambda)|\cdot|B| = |E|\cdot|B|$
- Αν $E = E_{ij}$, τότε: $|E\cdot B| = |E_{ij}\cdot B| = -|B| = -(1)\cdot|B| = |E_{ij}|\cdot|B| = |E|\cdot|B|$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Αν $A\in M_n(\mathbb{K})$, τότε: A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

<u>Απόδειξη</u> "$\Rightarrow$" Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε γνωρίζαμε ότι υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_k$ έτσι ώστε:
$A = E_k\cdot E_{k-1}\cdot\ldots\cdot E_2\cdot E_1$
Τότε $|A| = |E_k\cdot\ldots\cdot E_2\cdot E_1| \overset{\text{Μαθ. Επαγωγή}}{=} |E_k|\cdot\ldots\cdot|E_2|\cdot|E_1| \neq 0$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $|A|\neq 0$. Αν ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος τότε υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_k, E_{k-1}, \dots, E_2, E_1$ και A' ένας πίνακας ο οποίος έχει μια μηδενική γραμμή, έτσι ώστε: $A = E_k\cdot E_{k-1}\cdot\ldots\cdot E_1\cdot A'$ και τότε:
$|A| \overset{\text{Μαθ. Επαγωγή}}{=} |E_k\cdot\ldots\cdot E_2\cdot E_1| = |E_k|\cdot\ldots\cdot|E_2|\cdot|E_1|\cancel{|A'|}^{0} = 0$: άτοπο
Άρα A: αντιστρέψιμος

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Αν $A, B\in M_n(\mathbb{K})$, τότε:

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$$

<u>Απόδειξη</u>: ① Υποθέτουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_k, \dots, E_2, E_1$ έτσι ώστε: $A = E_k\cdot\ldots\cdot E_2\cdot E_1$. Τότε:
$|A\cdot B| = |E_k\cdot\ldots\cdot E_2\cdot E_1\cdot B| \overset{\text{Μαθ. Επαγωγή}}{=} |E_k|\cdot\ldots\cdot|E_2|\cdot|E_1|\cdot|B| \overset{\text{Μαθ. Επαγωγή}}{=}$
$= |E_k\cdot\ldots\cdot E_2\cdot E_1|\cdot|B| = |A|\cdot|B|$

② Υποθέτουμε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος τότε $|A| = 0$ και άρα: $|A|\cdot|B| = 0$. Επομένως αρκεί <u>νδο</u> $|A\cdot B| = 0$. Επειδή ο A δεν είναι αντιστρέψιμος υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_k, \dots, E_2, E_1$, και

Ένας πίνακας A' με μια μηδενική γραμμή έτσι ώστε: $A = E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A'$

Τότε: $|A\cdot B| = |E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A' \cdot B| \overset{\text{μαθ. επαγωγή}}{=} |E_k| \cdot \ldots \cdot |E_2||E_1| \cdot \cancel{|A' \cdot B|}\ 0 =$

$= 0$ διότι ο $A'\cdot B$ έχει μια μηδενική γραμμή

Άρα: $|AB| = 0 = |A|\cdot|B|$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω $D: \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, όπου $n \geq 1$ μια απεικόνιση.

Υποθέτουμε ότι:

(1) $D(A) = D(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_i + \lambda \Sigma_i', \ldots, \Sigma_n) = D(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_i, \ldots, \Sigma_n) + \lambda D(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_i', \ldots, \Sigma_n)$

(2) $D(A) = D(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n) = 0$, αν $\Sigma_i = \Sigma_j$, όπου $i \neq j$

(3) $D(I_n) = 1$

Τότε: $D(A) = |A|$, $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

$\forall n \in \mathbb{N}$, έστω $S_n = \{\sigma : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\} \mid \sigma: 1\text{-}1 \text{ και επί}\}$

Τότε: $|S_n| = n!$. Τα στοιχεία σ του συνόλου S_n καλούνται <u>μεταθέσεις</u>

Το πρόσημο μιας μετάθεσης $\sigma \in S_n$ ορίζεται να είναι ο αριθμός:

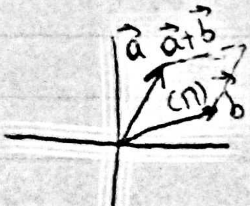
$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \in \{1, -1\}$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

<u>Γεωμετρική Ερμηνεία Ορίζουσας</u>

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ένας 2×2 πίνακας



Θεωρούμε τα διανύσματα στο επίπεδο:

$\vec{a} = (a_{11}, a_{12})$, $\vec{b} = (a_{21}, a_{22})$. Τότε:

εμβαδόν του (Π) $= ||A|| = |a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}|$

Αν $A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \vec{a} \\ \leftarrow \vec{b} \\ \leftarrow \vec{c} \end{array}$ Τότε $||A||$ = όγκος του (Π)

(Π): ένα παρ/δο που σχηματίζεται από τα τρία διανύσματα

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Ο προσαρτημένος πίνακας του A ορίζεται να είναι ο
$(adj(A))_{ij} = A_{ji} = (-1)^{j+i} D_{ji}$

Αν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, τότε: $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot d \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot c$
$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot b \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot a$

$adj(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$:
$A \cdot adj(A) = |A| \cdot I_n = adj(A) \cdot A$

<u>Απόδειξη</u>: Για κάθε $i, j = 1, \dots, n$:
$[A \cdot adj(A)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (adj(A))_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk}$

① Αν $i = j$, τότε $[A \cdot adj(A)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$ = ανάπτυγμα της ορίζουσας του A κατά τα στοιχεία της i-γραμμής.

Άρα: $[A \cdot adj(A)]_{ij} = |A| = (|A| \cdot I_n)_{ij}$, όπου $i = j$

② Αν $i \neq j$ τότε: $[A \cdot adj(A)]_{ij} = 0 = (0 \cdot I_n)_{ij}$

$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ Τότε $0 = |A'| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$

Άρα από τα ① και ②: $A \cdot adj(A) = |A| \cdot I_n = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}$

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u>: Έστω ότι ο $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι αντιστρέψιμος. Τότε: $|A| \neq 0$
και τότε: $A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \cdot adj(A)\right) = I_n = \left(\frac{1}{|A|} \cdot adj(A)\right) \cdot A$

Άρα A: αντιστρέψιμος, τότε: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A)}$

Έστω $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ και $B \in \mathbb{M}_{n1}(\mathbb{K})$

Τότε ορίζεται το σύστημα: (Σ) $A \cdot X = B$

Το σύστημα (Σ) καλείται σύστημα Cramer $\Leftrightarrow$ A: αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Αν το (Σ) είναι σύστημα Cramer, τότε υπάρχει ο πίνακας A^{-1} και τότε $X = A^{-1} \cdot B$ και $A(A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = I_n \cdot B = B \Rightarrow$

$\Rightarrow$ το (Σ) έχει μοναδική λύση $X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A^{-1} \cdot B)_{11} \\ (A^{-1} \cdot B)_{21} \\ \vdots \\ (A^{-1} \cdot B)_{n1} \end{pmatrix}$

$$(A^{-1} \cdot B)_{i1} = \sum_{k=1}^{n} (A^{-1})_{ik} (B)_{k1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{adj(A)}{|A|} \right)_{ik} (B)_{k1} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{k=1}^{n} (adj(A))_{ik} \cdot (B)_{k1} = \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{k=1}^{n} A_{ki} (B)_{k1} = \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} A_{ki} \cdot b_k =$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} \dots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \dots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

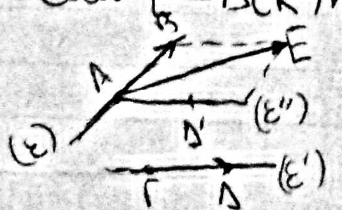
Άρα η μοναδική λύση του (Σ) είναι η $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, όπου

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} \dots b_1 \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \dots b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

16-11-18

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

$\Delta(\mathbb{R}^2)$ ή $\Delta(\mathbb{R}^3)$: σύνολο όλων των ελεύθερων διανυσμάτων στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ ή στο χώρο $\mathbb{R}^3$. Έστω $E = \Delta(\mathbb{R}^2)$ ή $\Delta(\mathbb{R}^3)$



• Έτσι ορίζεται μία πράξη πρόσθεσης στο E: $\vec{AB},\vec{\Gamma\Delta}\in E$, τότε $\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}=\vec{AE}$

• Αν $\vec{AB}\in E$, $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε ορίζεται ένα νέο διάνυσμα:

$\lambda\cdot\vec{AB}$ → έχει την διεύθυνση του $\vec{AB}$
→ φορά του $\vec{AB}$ αν $\lambda>0$, αντίθετη του $\vec{AB}$, αν $\lambda<0$
→ μέτρο: $|\lambda|\cdot$ μέτρο $\vec{AB}$

Έτσι έχουμε ορίσει μία πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού αριθμού λ με διάνυσμα $\vec{AB}$.

$\lambda\in\mathbb{R},\ \vec{AB}\in E:\ \lambda\cdot\vec{AB}$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω $\mathbb{K}$: σώμα ($\mathbb{K}=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$) Ένας διανυσματικός χώρος πάνω του σώματος $\mathbb{K}$ είναι μία τριάδα $(E,+,\cdot)$ η οποία αποτελείται από ένα σύνολο E και δύο πράξεις:

$+ : E\times E\to E, (\vec{x},\vec{y})\to\vec{x}+\vec{y}$ (πρόσθεση)

$\cdot : \mathbb{K}\times E\to E, (\lambda,\vec{x})\to\lambda\cdot\vec{x}$ (βαθμωτός πολ/μός)

έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα εξής αξιώματα:

1. $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$ (προσεταιριστική ιδιότητα πρόσθεσης)
2. $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ (μεταθετικότητα της πρόσθεσης)
3. $\exists\vec{0}\in E: \forall\vec{x}\in E: \vec{x}+\vec{0}=\vec{x}=\vec{0}+\vec{x}$ (ύπαρξη μηδενικού διανύσματος)

Το στοιχείο $\vec{0}$ καλείται μηδενικό διάνυσμα του E.

4. $\forall\vec{x}\in E: \exists-\vec{x}\in E: \vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}=(-\vec{x})+\vec{x}$ (ύπαρξη αντίθετου στοιχείου το στοιχείο $-\vec{x}$ καλείται αντίθετο του $\vec{x}$)
5. $\forall\kappa,\lambda\in\mathbb{K}, \forall\vec{x}\in E: (\kappa+\lambda)\cdot\vec{x}=\kappa\vec{x}+\lambda\cdot\vec{x}$
(επιμεριστική ιδιότητα βαθμωτού πολ/μού με την πρόσθεση αριθμών)
6. $\forall\kappa\in\mathbb{K}, \forall\vec{x}\in E, \forall\vec{y}\in E: \kappa(\vec{x}+\vec{y})=\kappa\vec{x}+\kappa\vec{y}$
(επιμεριστική ιδιότητα βαθμωτού πολ/μού ως προς την πρόσθεση στοιχείων του E)
7. $\forall\kappa,\lambda\in\mathbb{K}, \forall\vec{x}\in E: \kappa\cdot(\lambda\cdot\vec{x})=(\kappa\cdot\lambda)\cdot\vec{x}$
(επιμεριστική ιδιότητα βαθμωτού πολ/μου)

) $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$ (μοναδιαίο αξίωμα)

Αν $(E,+,\cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, τότε τα στοιχεία του E καλούνται διανύσματα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

) Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ στο (3) είναι μοναδικό.
Έστω ότι: $\vec{0},\vec{0}'\in E$ έτσι ώστε: $\forall \vec{x}\in E$: $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}=\vec{0}+\vec{x}$ (a)
$\vec{x}+\vec{0}'=\vec{x}=\vec{0}'+\vec{x}$ (b)

Στο (a) θέτουμε $\vec{x}=\vec{0}'$. Τότε: $\vec{0}'+\vec{0}=\vec{0}'$
Στο (b) θέτουμε $\vec{x}=\vec{0}$. Τότε: $\vec{0}=\vec{0}'+\vec{0}$
Άρα $\vec{0}=\vec{0}'$

) Το αντίθετο ενός διανύσματος $\vec{x}$ είναι μοναδικό: Έστω $-\vec{x}$, $-\vec{x}'\in E$ έτσι ώστε $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}=(-\vec{x})+\vec{x} \Longrightarrow (-\vec{x}')+\vec{x}+(-\vec{x})=(-\vec{x}')+\vec{0} \Rightarrow [(-\vec{x}')+\vec{x}]+(-\vec{x})=(-\vec{x}') \Rightarrow$
$\vec{x}+(-\vec{x}')=\vec{0}=(-\vec{x}')+\vec{x} \Longrightarrow \vec{0}+(-\vec{x})=(-\vec{x}') \Rightarrow (-\vec{x})=(-\vec{x}')$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

) Το σύνολο E, όπου $E=\Delta(\mathbb{R}^2)$ ή $\Delta(\mathbb{R}^3)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{R}$, όταν εφοδιαστεί με την πρόσθεση διανυσμάτων και τον βαθμωτό πολ/μό αριθμού με διάνυσμα.

) Έστω $\mathbb{K}$: σώμα. Θεωρούμε το σύνολο:
$$\mathbb{K}^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n) \mid x_i\in\mathbb{K},\ 1\leq i\leq n\}$$
Ορίζουμε πράξεις στο σύνολο $\mathbb{K}^n$ ως εξής:

- Έστω $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$. Τότε $\vec{x}+\vec{y}=$
$=(x_1+y_2,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$
(πρόσθεση)
- Αν $\kappa\in\mathbb{K}$ $\kappa\cdot\vec{x}=(\kappa\cdot x_1,\kappa x_2,\dots,\kappa\cdot x_n)$
(βαθμωτός πολλαπλασιασμός)

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Η τριάδα $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Έστω $\kappa,\lambda \in \mathbb{K}$, $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{K}^n$

<u>Θδο</u>: $(\kappa+\lambda)\cdot\vec{x}=\kappa\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{x}$ και $\kappa\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\kappa\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$

— $(\kappa+\lambda)\cdot\vec{x}=(\kappa+\lambda)\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)=((\kappa+\lambda)x_1,(\kappa+\lambda)x_2,\ldots,(\kappa+\lambda)x_n)=$
$=(\kappa\cdot x_1+\lambda x_1,\kappa x_2+\lambda x_2,\ldots,\kappa x_n+\lambda x_n)=$
$=(\kappa x_1,\kappa x_2,\ldots,\kappa x_n)+(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)=$
$=\kappa\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\kappa\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{x}$

— $\kappa\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\kappa\cdot(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)=(\kappa\cdot(x_1+y_1),\kappa(x_2+y_2),\ldots,\kappa(x_n+y_n))=$
$=(\kappa x_1+\kappa y_1,\kappa x_2+\kappa y_2,\ldots,\kappa x_n+\kappa y_n)=(\kappa x_1,\kappa x_2,\ldots,\kappa x_n)+(\kappa y_1,\kappa y_2,\ldots,\kappa y_n)$
$=\kappa(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\kappa(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\kappa\cdot\vec{x}+\kappa\cdot\vec{y}$

— Θέτουμε $\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$. Τότε $\forall\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$:
$\vec{x}+\vec{0}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(0,0,\ldots,0)=(x_1+0,x_2+0,\ldots,x_n+0)=$
$=(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\vec{x}$
Παρόμοια $\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$. Άρα ισχύει το αξίωμα (3) και $\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$: μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{K}^n$.

— Έστω $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$. Θέτουμε $-\vec{x}=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)\in\mathbb{K}^n$
Τότε: $\vec{x}+(-\vec{x})=(x_1+(-x_1),x_2+(-x_2),\ldots,x_n+(-x_n))=(0,0,\ldots,0)=\vec{0}$
Παρόμοια: $(-\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}$. Άρα ισχύει το αξίωμα (4) και $-\vec{x}=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$ είναι το αντίθετο του $\vec{x}$.

— $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $\vec{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$
$\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1+z_1,y_2+z_2,\ldots,y_n+z_n)=$
$=(x_1+(y_1+z_1),\ldots,x_n+(y_n+z_n))=$
$=((x_1+y_1)+z_1,\ldots,(x_n+y_n)+z_n)=$
$=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)+(z_1,\ldots,z_n)=$
$=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$

③ Έστω $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ το σύνολο όλων των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Αν (+) είναι η συνήθης πρόσθεση πινάκων και (·) ο συνήθης βαθμωτός πολ/μός αριθμών με πίνακα: αν $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $\kappa\in\mathbb{K}$: $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$ και $\kappa\cdot A=(\kappa\cdot a_{ij})$

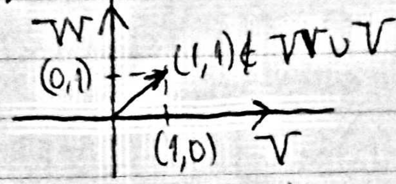
<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ</u>: Η τριάδα $(M_{m\times n}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Η απόδειξη των αξιωμάτων ① έως ⑧ έχει γίνει

23-11-18

E: $\mathbb{K}$-δ.χ. Αν V, W υπόχωροι του E, τότε:
$V \cap W$: υπόχωρος του E
$V+W = \{ \vec{x}+\vec{y} \in E \mid \vec{x} \in V, \vec{y} \in W \}$: υπόχωρος του E

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ο $\mathbb{R}$-δ.χ. $\mathbb{R}^2$ και έστω
$V = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$, όπου V, W υπόχωροι του E
$W = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$
Τότε $V \cup W$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$
Αφού $(1,0) \in V \Rightarrow (1,0) \in V \cup W$, $(0,1) \in W \Rightarrow (0,1) \in W \cup V$.
Όμως $(1,1) = (1,0)+(0,1) \notin V \cup W$
Γεωμετρική ερμηνεία:



Αν $V_1, V_2, \dots, V_n$: υπόχωροι του E τότε:
$\bigcap_{i=1}^{n} V_i$: υπόχωρος του E
$V_1+V_2+\dots+V_n = \{ \vec{x}_1+\vec{x}_2+\dots+\vec{x}_n \in E \mid \vec{x}_i \in V_i, 1 \leq i \leq n \}$: υπόχωροι του E

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$
Δεν είναι υπόχωρος, διότι:
$(1,0,1), (1,1,0) \in V$. Όμως $\underbrace{(2,1,1)}_{(1,0,1)+(1,1,0)} \notin V$ διότι $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \neq 0$

2. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y^2\}$
Δεν είναι υπόχωρος διότι: $(1,1,0) \in V$, αλλά $2 \cdot (1,1,0) = (2,2,0)$ ~~διότι~~ $\notin V$ διότι $2 \neq 2^2 = 4$

3. $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$

Δεν είναι υπόχωρος, διότι:
$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \in V$, διότι $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. Όμως $2 \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix} \notin V$, διότι:
$\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}^2 \neq \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$

4. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0$ και $z \leq 0\}$
Δεν είναι υπόχωρος, διότι: $(1,0,-1) \in V$ αλλά $(-2)\cdot(1,0,-1) = (-2,0,2) \notin V$
5. $V = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 1\}$
Δεν είναι υπόχωρος, διότι $0 \notin V$, όπου $0(x) = 0$
6. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \geq 1\}$
Δεν είναι υπόχωρος, διότι $(0,0,0) \notin V$
7. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 1\}$
Δεν είναι υπόχωρος, διότι $(0,0,0) \notin V$

Αν $\mathbb{K}$: σώμα, τότε $A(\mathbb{K}) = \{(a_n)_{n\geq 0} \mid a_n \in \mathbb{K}, \forall n \geq 0\}$: $\mathbb{K}$-δ.χ. με πράξεις
$(a_n)_{n\geq 0} + (b_n)_{n\geq 0} = (a_n + b_n)_{n\geq 0}$, $\lambda \cdot (a_n)_{n\geq 0} = (\lambda a_n)_{n\geq 0}$
Έστω $V = \{(a_n)_{n\geq 0} \in A(\mathbb{K}) \mid \exists n \in \mathbb{N}: a_k = 0, \forall k > n\}$
<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ</u>: V: υπόχωρος του $A(\mathbb{K})$
• η μηδενική ακολουθία ανήκει στο V.

• Έστω $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0} \in V \Rightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N}: a_k = 0, \forall k > n \\ \exists m \in \mathbb{N}: b_k = 0, \forall k > m \end{cases}$
Τότε για την ακολουθία:
$(a_n)_{n\geq 0} + (b_n)_{n\geq 0} = (a_n + b_n)_{n\geq 0} \in V$, διότι αν $k = \max\{m, n\}$, τότε:
$a_r + b_r = 0, \forall r > k$

• $(a_n)_{n\geq 0} \in V$, και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε: $\exists n \in \mathbb{N}: a_k = 0, \forall k > n$ και τότε για την
$\lambda (a_n)_{n\geq 0} = (\lambda a_n)_{n\geq 0}$ έχουμε ότι $\lambda a_k = 0, \forall k > n$. Άρα $\lambda \cdot (a_n)_{n\geq 0} \in V$
Άρα V: υπόχωρος του $A(\mathbb{K})$

$1=(1,0,0,0,\ldots,0,\ldots)\in V$
$t=(0,1,0,0,0,\ldots,0,\ldots)\in V$
$t^2=(0,0,1,0,0,\ldots,0,\ldots)\in V$
$\vdots$
$t^n=(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots)\in V$
$(n+1)$όρος
$\vdots$

Έστω $(a_n)_{n\geq 0}\in V \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}: a_k=0,\ \forall k>n$

$(a_n)_{n\geq 0}=(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,0,0,\ldots)=$
$=(a_0,0,\ldots,0,\ldots)+(0,a_1,0,\ldots,0,\ldots)+(0,0,a_2,\ldots,0,\ldots)+\ldots+$
$+(0,0,\ldots,a_n,0,\ldots)+(0,0,0,\ldots,0,\ldots)=$
$=a_0\cdot(1,0,0,\ldots)+a_1(0,1,0,\ldots)+a_2(0,0,1,0,\ldots)+\ldots+a_n(0,0,\ldots,1,0)=$
$=a_0\cdot 1+a_1\cdot t+a_2\cdot t^2+\ldots+a_n t^n$

$V=\{a_0\cdot 1+a_1 t+a_2 t^2+\ldots+a_n t^n \mid a_i\in\mathbb{K},\ n\in\mathbb{N}\}$

- Μια ακολουθία της μορφής $a_0\cdot 1+a_1 t+a_2\cdot t^2+\ldots+a_n\cdot t^n$ θα καλείται <u>πολυώνυμο</u> με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$.

Από τώρα και στο εξής θα γράφαμε:
- $(a_n)_{n\geq 0}=P(t)=a_0 1+a_1 t+a_2 t^2+\ldots+a_n t^n=a_0+a_1 t+\ldots+a_n t^n \,//\, \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$
- $V=\mathbb{K}[t]$: $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$.

$P(t)=a_0+a_1 t+\ldots+a_n t^n$
$\deg P(t)=\max\{k\in\mathbb{N}\cup\{0\} \mid a_k\neq 0\}$
$P(t)=0=0+0\cdot t+0\cdot t^2+\ldots+0\, t^n$: δεν ορίζεται βαθμός στο μηδενικό πολυώνυμο

- $\deg(P(t)+Q(t))\leq\max\{\deg P(t),\deg Q(t)\}$
- $\deg(\lambda\cdot P(t))=\deg P(t)$, όπου $\lambda\neq 0$

Ορίζαμε: $\forall n\geq 0: \mathbb{K}_n[t]=\{P(t)\in\mathbb{K}[t] \mid \deg P(t)\leq n\}\cup\{0\}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: $\forall n \geq 0$: $\mathbb{K}_n[t]$: υπόχωρος του $\mathbb{K}[t]$

- $0 \in \mathbb{K}_n[t]$
- $P(t), Q(t) \in \mathbb{K}_n[t]$, τότε $\deg P(t), \deg Q(t) \leq n \Rightarrow \deg(P(t)+Q(t)) \leq n \Rightarrow$
  $\Rightarrow P(t)+Q(t) \in \mathbb{K}_n[t]$
- Αν $P(t) \in \mathbb{K}_n[t] \rightarrow \deg P(t) \leq n$
  $\lambda \in \mathbb{K}$
  - Αν $\lambda \neq 0$, τότε $\deg(\lambda \cdot P(t)) = \deg P(t) \leq n \rightarrow$
    $\Rightarrow \lambda \cdot P(t) \in \mathbb{K}_n[t]$
  - Αν $\lambda = 0$, τότε $\lambda \cdot P(t) = 0 \in \mathbb{K}_n[t]$

Άρα το υποσύνολο $\mathbb{K}_n[t]$: υπόχωρος του $\mathbb{K}[t]$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ. Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\} \subseteq E$

- Κάθε διάνυσμα του E της μορφής: $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{x}_n$ καλείται <u>γραμμικός συνδυασμός</u> των $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το σύνολο $<\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n> = \{\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{x}_n \in E \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\}$ καλείται ο υπόχωρος του E ο οποίος παράγεται από τα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$

- Το υποσύνολο $<\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n>$ είναι πράγματι υπόχωρος του E, διότι:

- $\vec{0} \in <\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n>$, διότι: $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n$
- $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{x}_n,\ \kappa_1\vec{x}_1 + \kappa_2\vec{x}_2 + \ldots + \kappa_n\vec{x}_n \in <\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n> \Rightarrow$
  $\Rightarrow \lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{x}_n + \kappa_1\vec{x}_1 + \ldots + \kappa_n\vec{x}_n = (\lambda_1+\kappa_1)\vec{x}_1 + \ldots + (\lambda_n+\kappa_n)\vec{x}_n \in <\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n>$
- $\kappa \in \mathbb{K}$, $\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{x}_n \Rightarrow \kappa \cdot (\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{x}_n) = (\kappa \cdot \lambda_1)\vec{x}_1 + \ldots + (\kappa \cdot \lambda_n) \cdot \vec{x}_n \in$
  $\in <\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n>$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. $<\vec{0}> = \{\vec{0}\}$: ο μηδενικός υπόχωρος
2. $<\vec{x}> = \{\lambda \cdot \vec{x} \in E \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$
3. $<1, t, t^2, \ldots, t^n> = \mathbb{K}_n[t]$

④ $\vec{e}_1=(1,0,\ldots,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $\vec{e}_n=(0,0,\ldots,1)\in\mathbb{K}^n$

Τότε: $\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\rangle=\{\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n\in\mathbb{K}^n \mid \lambda_i\in\mathbb{K},\ 1\le i\le n\}=$

$$=\{\lambda_1\cdot(1,0,\ldots,0)+\lambda_2\cdot(0,1,0,\ldots,0)+\ldots+\lambda_n(0,0,\ldots,1) \mid {\scriptstyle \lambda_i\in\mathbb{K} \atop 1\le i\le n}\}=$$

$$=\{(\lambda_1,0,\ldots,0)+(0,\lambda_2,\ldots,0)+\ldots+(0,0,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n \mid {\scriptstyle \lambda_i\in\mathbb{K} \atop 1\le i\le n}\}=$$

$$=\{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n \mid {\scriptstyle \lambda_i\in\mathbb{K} \atop 1\le i\le n}\}=\mathbb{K}^n$$

Παρόμοια, αν $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\ldots$, $\vec{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{K}_n$,

τότε: $\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\rangle=\mathbb{K}_n$

⑤ Στον $\mathbb{K}$-δ.χ. $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ θεωρούμε τους πίνακες

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&\ldots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix}=a_{11}\cdot\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix}0&1&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix}+a_{1n}\begin{pmatrix}0&0&\ldots&1\\0&0&\ldots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix}$$

$$+a_{21}\begin{pmatrix}0&0&\ldots&0\\1&0&\ldots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}0&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix}+\ldots+a_{2n}\begin{pmatrix}0&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&1\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$+a_{m1}\begin{pmatrix}0&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\\vdots&&&\vdots\\1&0&\ldots&0\end{pmatrix}+a_{m2}\begin{pmatrix}0&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&1&\ldots&0\end{pmatrix}+\ldots+a_{mn}\begin{pmatrix}0&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$E_{ij}=\begin{pmatrix}0&\ldots&0&\ldots&0\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&\ldots&1&\ldots&0\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&&0&\ldots&0\end{pmatrix}\quad {1\le i\le m \atop 1\le j\le n}$$

i-γραμμή

j-στήλη

και τότε: $A=(a_{ij})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$. Άρα $\langle E_{ij} \mid {\scriptstyle 1\le i\le m \atop 1\le j\le n}\rangle=\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

① Έστω $\vec{x}_1=(0,1,1)$, $\vec{x}_2=(0,0,1)$. Ισχύει ότι $(1,0,0)\in\langle\vec{x}_1,\vec{x}_2\rangle$;

Λύση

$\langle\vec{x}_1,\vec{x}_2\rangle=\{\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2\in\mathbb{R}^3 \mid \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}=\{\lambda_1\cdot(0,1,1)+\lambda_2(0,0,1)\in\mathbb{R}^3 \mid \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}=$

$=\{(0,\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2)\in\mathbb{R}^3 \mid \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}$. Τότε $(1,0,0)\in\langle\vec{x}_1,\vec{x}_2\rangle$

$\iff \exists\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}: (1,0,0)=(0,\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2)$, άτοπο.

Άρα $(1,0,0)\notin\langle\vec{x}_1,\vec{x}_2\rangle$.

② $\vec{x}_1=(1,1,0)$, $\vec{x}_2=(1,0,1)$, $\vec{x}_3=(0,1,1)$, $\vec{x}=(a,b,\gamma)\in\mathbb{R}^3$

$\vec{x}\in\langle\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\rangle \iff \exists\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}: \vec{x}=\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\lambda_3\vec{x}_3 \iff \exists\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$

$(a,b,\gamma)=\lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(1,0,1)+\lambda_3(0,1,1) \iff \exists\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$

$(\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1+\lambda_3,\lambda_2+\lambda_3)=(a,b,\gamma) \iff \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=a\\ \lambda_1+\lambda_3=b\\ \lambda_2+\lambda_3=\gamma\end{cases} (\Sigma)$

$\iff$ τα $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ είναι λύσεις του (Σ)

$\lambda_1=\dfrac{a+b-\gamma}{2}$, $\lambda_2=\dfrac{a-b+\gamma}{2}$, $\lambda_3=\dfrac{-a+b+\gamma}{2}$: η μοναδική λύση του (Σ)

$\Rightarrow \vec{x}\in\langle\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\rangle: \vec{x}=\dfrac{a+b-\gamma}{2}\cdot\vec{x}_1+\dfrac{a-b+\gamma}{2}\cdot\vec{x}_2+\dfrac{-a+b+\gamma}{2}\cdot\vec{x}_3$

Αν $S\subseteq E$, τότε ένας γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του S είναι κάθε διάνυσμα της μορφής $\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_n\vec{x}_n$, όπου $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{K}$, $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n\in S$

Τότε ορίζουμε $\langle S\rangle=\{\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_n\vec{x}_n\in E \mid \lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{K}, \vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n\in S, n\in\mathbb{N}\}$

είναι ο υπόχωρος του E ο οποίος παράγεται από το S

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $S=\{1,t,t^2,\ldots,t^n,\ldots\}$. Τότε:
$\langle S\rangle=\mathbb{K}[t]$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο διανυσμάτων $S\subseteq E$ καλείται σύνολο γεννητόρων του $E \iff \langle S\rangle=E$

Ο $\mathbb{K}$-δ.χ. E καλείται πεπερασμένα παραγόμενος $\Leftrightarrow \exists\, S$: σύνολο γεννητόρων του E με: $|S|<\infty$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

① $\mathbb{K}^n = \langle \vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n \rangle$, όπου: $\vec{e}_i = (0,\dots,0,\overset{\text{i-θέση}}{1},0,\dots,0)$ $1\le i\le n \Rightarrow$
$\Rightarrow \{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$: σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{K}^n \Rightarrow \mathbb{K}^n$: πεπερασμένα παραγόμενος

② Παρόμοια $\mathbb{K}_n = \langle \vec{e}^1, \vec{e}^2,\dots,\vec{e}^n \rangle$, όπου $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← i-θέση, $1\le i\le n$

$\Rightarrow \{\vec{e}^1,\dots,\vec{e}^n\}$: σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{K}^n \Rightarrow \mathbb{K}_n$: πεπ/να παρ/νος

③ $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \left\langle E_{ij} \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 1\le i\le m \\ 1\le j\le n \end{smallmatrix} \right\rangle \Rightarrow \left\{ E_{ij} \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 1\le i\le m \\ 1\le j\le n \end{smallmatrix} \right\}$: σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$\Rightarrow$ ο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$: πεπερασμένα παραγόμενος

④ $\mathbb{K}_n[t] = \langle 1,t,t^2,\dots,t^n \rangle = \{1,t,t^2,\dots,t^n\}$: σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{K}_n[t] \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{K}_n[t]$ πεπ/να παρ/νος

⑤ $\mathbb{K}[t] = \langle S \rangle$, $S = \{1,t,t^2,\dots,t^n,\dots\}$
Αν υπήρχε $R = \{P_1(t),\dots,P_n(t)\} \subseteq \mathbb{K}[t]$ $\langle R \rangle = \mathbb{K}[t]$, τότε έστω
$\deg P_1[t] = k_1$ Έστω t^r, όπου $r > \max\{k_1,k_2,\dots,k_n\}$, τότε
$\deg P_2[t] = k_2$ $t^r \notin \langle P_1[t],\dots,P_n[t] \rangle = \langle R \rangle = \mathbb{K}[t]$
$\vdots$
$\deg P_n[t] = k_n$ διότι διαφορετικά: $t^r = \lambda_1 P_1(t) + \dots + \lambda_n P_n(t)$ ΑΤΟΠΟ

Άρα ο $\mathbb{K}[t]$ δεν είναι πεπ/να παραγόμενος

⑥ $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-3y+5z=0\} = \{(3y-5z,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y,z\in\mathbb{R}\} =$
$= \{(3y,y,0)+(-5z,0,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y,z\in\mathbb{R}\} =$
$= \{y\cdot(3,1,0)+z\cdot(-5,0,1)\in\mathbb{R}^3 \mid y,z\in\mathbb{R}\} = \langle (3,1,0),(-5,0,1) \rangle$

7 $V=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in K^n \mid a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=0\}$ όπου $a_1,a_2,\dots,a_n\in K$

(a) $a_1=a_2=\dots=a_n=0$. Τότε: $V=K^n$

(b) $\exists\, i=1,\dots,n: a_i\neq 0$. Τότε $a_1x_1+\dots+a_ix_i+\dots+a_nx_n=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_i=\underbrace{(-a_1a_i^{-1})}_{b_1}x_1+\dots+\underbrace{(-a_{i-1}a_i^{-1})}_{b_{i-1}}\cdot x_{i-1}+\underbrace{(-a_{i+1}a_i^{-1})}_{b_{i+1}}x_{i+1}+\dots+\underbrace{(-a_na_i^{-1})}_{b_n}x_n$$

$$V=\{(x_1,\dots,x_{i-1},b_1x_1+\dots+b_{i-1}x_{i-1}+b_{i+1}x_{i+1}+\dots+b_nx_n,x_{i+1},\dots,x_n)\in K^n \mid x_j\in K,\ 1\le j\le n,\ j\neq i\}$$

$$\langle(1,0,\dots,0,b_1,\dots,0),(0,1,\dots,b_2,\dots,0),\dots,(0,\dots,b_n,\dots,1)\rangle=V$$

27-11-18

E: K-δ.χ. και $S=\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\}\subseteq E$

$\langle S\rangle=\{\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\dots+\lambda_n\vec{x}_n\in E \mid \lambda_1,\dots,\lambda_n\in K\}$: ο υπόχωρος του E ο οποίος παράγεται από το S

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΣΥΝΟΛΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ $S=\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\}$

- $\vec{x}_i\to\vec{x}_i+\lambda\vec{x}_j$, $1\le i,j\le n$, $\lambda\in K$
- $\vec{x}_i\to\lambda\vec{x}_i$, $1\le i\le n$, $\lambda\neq 0$
- $\vec{x}_i\leftrightarrow\vec{x}_j$, $1\le i\le j$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ο υπόχωρος ο οποίος παράγεται από το S δεν αλλάζει μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στα διανύσματα του συνόλου S.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: • Έστω η στοιχειώδης πράξη: $\vec{x}_i\to\vec{x}_i+\lambda\vec{x}_j$. Θ.δ.ο. $\langle x_1,\dots,x_i,\dots,x_n\rangle=$
$=\langle\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i+\lambda\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n\rangle$

• Έστω $\vec{x}\in\langle\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n\rangle\Rightarrow\vec{x}=k_1\vec{x}_1+\dots+k_i\vec{x}_i+\dots+k_n\vec{x}_n=$
$=k_1\vec{x}_1+\dots+k_i(\vec{x}_i+\lambda\vec{x}_j)-k_i\lambda\vec{x}_j+\dots+k_j\vec{x}_j+\dots+k_n\vec{x}_n=$
$=k_1\vec{x}_1+\dots+k_i(\vec{x}_i+\lambda\vec{x}_j)+\dots+(k_j-k_i\lambda)\vec{x}_j+\dots+k_n\vec{x}_n\in\langle\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i+\lambda\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n\rangle$

Άρα $\langle\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n\rangle\subseteq\langle\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i+\lambda\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n\rangle$ (*)

Έστω $\vec{x}\in\langle\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i+\lambda\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n\rangle\Rightarrow\vec{x}=k_1\vec{x}_1+\dots+k_i(\vec{x}_i+\lambda\vec{x}_j)+\dots+k_n\vec{x}_n=$

$= k_1\vec{x}_1 + \dots + k_i\vec{x}_i + \dots + (k_j + k_i\lambda)\vec{x}_j + \dots + k_n x_n \in \langle \vec{x}_1, \dots, x_i, \dots, \vec{x}_n \rangle$

Άρα $\langle \vec{x}_1, \dots, x_i + \lambda \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n \rangle \subseteq \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n \rangle$ (**)

(*), (**) $\Rightarrow \langle \vec{x}_1, \dots, x_i, \dots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \dots, x_i + \lambda \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n \rangle$

Παρόμοια: $\langle \vec{x}_1, \dots, x_i, \dots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \dots, \lambda \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n \rangle$, $\lambda \neq 0$

$$\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n \rangle$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΥΠΟΧΩΡΟΥ ΠΟΥ ΠΑΡΑΓΕΤΑΙ ΑΠΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Έστω $\vec{x}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$

$\vec{x}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{K}^n$

$\vdots$

$\vec{x}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Να περιγραφεί ο υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$ $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Έστω $\Gamma(A) = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}$: η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A

Τότε από την ΠΡΟΤΑΣΗ έπεται ότι:

$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n \rangle$, όπου

$\vec{y}_1 = (a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{1n})$

$\vdots$

$\vec{y}_m = (a'_{m1}, a'_{m2}, \dots, a'_{mn})$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\vec{x}_1 = (3, 5, -4)$ $\vec{x}_2 = (-3, -2, 4)$ $\vec{x}_3 = (6, 1, -8) \in \mathbb{R}^3$

$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle =;$

ΛΥΣΗ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \to -\frac{1}{9}\Gamma_3}]{\Gamma_1 \to \frac{1}{3}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \frac{5}{3}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Θέτω $\vec{y}_1 = (1, 0, -\frac{4}{3})$
$\vec{y}_2 = (0, 1, 0)$
Τότε $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle = \{ \lambda_1 \vec{y}_1 + \lambda_2 \vec{y}_2 \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} =$
$= \{ \lambda_1 (1, 0, -\frac{4}{3}) + \lambda_2 (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} =$
$= \{ (\lambda_1, \lambda_2, -\frac{4}{3}\lambda_1) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΓΕΝΝΗΤΟΡΩΝ ΤΟΥ V+W

Έστω V, W υπόχωροι του $\mathbb{K}^n$ και υποθέτουμε ότι: $V = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r \rangle$
$W = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_s \rangle$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Να βρεθεί ένα σύνολο γεννητόρων του
$V + W = \{ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} \in V, \vec{y} \in W \}$

Γνωρίζουμε ότι $V + W = \langle V \cup W \rangle$
Επειδή $V = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r \rangle$
$W = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_s \rangle$
$\Rightarrow V + W = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_s \rangle$

Σχηματίζουμε τον $(r+s) \times n$ πίνακα του οποίου οι γραμμές είναι τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_s$
Έστω ότι ο πίνακας αυτός είναι ο A, και έστω $\Gamma(A)$ η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A. Οι μη-μηδενικές γραμμές του $\Gamma(A)$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του V+W.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $\vec{x}_n \in \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1} \rangle \Rightarrow \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n \rangle$

2. $V_{\text{υπόχωρος}} \subseteq E$ και $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$, τότε $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle \underset{\text{υπόχωρος}}{\subseteq} V$

3. $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{0} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle$

4. $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m \rangle \Rightarrow \forall \vec{z} \in E : \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{z} \rangle =$
$= \langle \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m, \vec{z} \rangle$

⑤ $V \subseteq E$ και $X \subseteq Y \subseteq V$. Αν $<X> = V$ τότε $<Y> = V$

υπόχωρος

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4$

$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$V = \{(-2x_2 + x_3 + 2x_4, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(-2x_2, x_2, 0, 0) + (x_3, 0, x_3, 0) + (2x_4, 0, 0, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$= \{x_2(-2,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(2,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} =$

$= <(-2,1,0,0), (1,0,1,0), (2,0,0,1)$

$W = \{(x_1, 2x_3 - x_4, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(x_1, 0, 0, 0) + (0, 2x_3, x_3, 0) + (0, -x_4, 0, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x_1(1,0,0,0) + x_3(0,2,1,0) + x_4(0,-1,0,1) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} =$

$= <(1,0,0,0), (0,2,1,0), (0,-1,0,1)>$

$V + W = <(-2,1,0,0), (1,0,1,0), (2,0,0,1), (1,0,0,0), (0,2,1,0), (0,-1,0,1)>$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$V + W = <(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)> = \mathbb{R}^4$

$E: \mathbb{K}$-δ.χ. Έστω $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in E$ και έστω $V = <\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n>$

Τότε: $\forall \vec{x} \in V: \vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{x}_n$

$= k_1 \vec{x}_1 + k_2 \vec{x}_2 + \ldots + k_n \vec{x}_n$

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>: Ισχύει πάντα ότι: $k_1 = \lambda_1, \ldots, k_n = \lambda_n$;

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ καλείται γραμμικά ανεξάρτητο $\Leftrightarrow \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο (ΓΑ) τότε η έκφραση ενός διανύσματος $\vec{x}$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ είναι μοναδική.

$$\left.\begin{aligned}\vec{x} &= \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \dots + \lambda_n\vec{x}_n \\ \vec{x} &= \kappa_1\vec{x}_1 + \kappa_2\vec{x}_2 + \dots + \kappa_n\vec{x}_n\end{aligned}\right| \Rightarrow \lambda_1 = \kappa_1, \dots \lambda_n = \kappa_n$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο διανυσμάτων $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ καλείται βάση του $E \Leftrightarrow$ ① το B: σύνολο γεννητόρων του E και ② B = ΓΑ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το σύνολο B είναι βάση του $E \Leftrightarrow$ κάθε διάνυσμα του E γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου B.
Αν $\vec{x} \in E$, τότε: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$, όπου οι μοναδικά προσδιορισμένοι αριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_n$ καλούνται συνιστώσες του $\vec{x}$ ως προς τη βάση B.

30-11-18

Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ και $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subseteq E$

Τότε το B καλείται γραμμικά ανεξάρτητο $\Longleftrightarrow$

$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \dots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Αν το B δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε το B καλείται γραμμικά εξαρτημένο. Ισοδύναμα το B: γραμμικά εξαρτημένο $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ με $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$: $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \dots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το σύνολο B καλείται βάση του E αν και μόνον αν

① το B: γραμμικά ανεξάρτητο

② $\langle B \rangle = E$

Τότε: το $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$: βάση του $E \Leftrightarrow$ κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in E$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$:

$$\left.\begin{aligned}&\forall \vec{x} \in E: \vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \dots + \lambda_n\vec{e}_n \\ &\text{αν } \vec{x} = \kappa_1\vec{e}_1 + \kappa_2\vec{e}_2 + \dots + \kappa_n\vec{e}_n\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \kappa_1, \dots, \lambda_n = \kappa_n$$

Αν $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ όπου $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ είναι βάση του E, οι μοναδικά προσδιορισμένοι αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_n$ καλούνται συντεταγμένες του $\vec{x}$ ως προς το B.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

① Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{C}$ ως $\mathbb{R}$-δ.χ και θα γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{C}$ ως $\mathbb{C}$-δ.χ και θα γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$

Έστω $B=\{1,i\}$

Το σύνολο $B=\{1,i\}$ είναι Γ.Α. στον $\mathbb{R}$-δ.χ $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, διότι:

- $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Το σύνολο $B=\{1,i\}$ είναι Γ.Ε. στον $\mathbb{C}$-δ.χ. $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$, διότι:

- $\underset{(\lambda_1)}{i} \cdot 1 + \underset{(\lambda_2)}{(-1)} i = 0$ και $(i,1) \neq (0,0)$

② Στον $\mathbb{R}$-δ.χ. $\mathbb{R}^3$ τα σύνολα $B=\{\vec{e}_1=(1,0,0), \vec{e}_2=(0,1,0), \vec{e}_3=(0,0,1)\}$

$B'=\{\vec{\varepsilon}_1=(1,1,1), \vec{\varepsilon}_2=(1,1,0), \vec{\varepsilon}_3=(1,0,0)\}$

Για το B: ① $\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\lambda_3\vec{e}_3=\vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(0,1,0)+\lambda_3(0,0,1)=\vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0) \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

$\Rightarrow B$: Γ.Α.

② $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3: (x,y,z)=x\cdot\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\cdot\vec{e}_3$

Από (1),(2) $\Rightarrow B$: βάση του $\mathbb{R}^3$

Για το B': ① $\lambda_1\vec{\varepsilon}_1+\lambda_2\vec{\varepsilon}_2+\lambda_3\vec{\varepsilon}_3=\vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(1,0,0)=(0,0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \lambda_1+\lambda_2, \lambda_1)=(0,0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\Sigma): \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \Rightarrow B'$: Γ.Α.

② Έστω $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$. Εξετάζουμε αν υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$:

$(\alpha,\beta,\gamma)=\lambda_1\vec{\varepsilon}_1+\lambda_2\vec{\varepsilon}_2+\lambda_3\vec{\varepsilon}_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha,\beta,\gamma)=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \lambda_1+\lambda_2, \lambda_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\Sigma_1): \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\alpha \\ \lambda_1+\lambda_2=\beta \\ \lambda_1=\gamma \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda_1=\gamma}\ \boxed{\lambda_2=\beta-\gamma}$ $\lambda_3=\alpha-\lambda_1-\lambda_2=\alpha-\gamma-(\beta-\gamma) \Rightarrow \boxed{\lambda_3=\alpha-\beta}$

Από τα (1), (2) $\Rightarrow$ B': βάση του $\mathbb{R}^3$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3: (x,y,z) = x\cdot\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\cdot\vec{e}_3$

$(x,y,z) = z\cdot\vec{\varepsilon}_1 + (y-z)\vec{\varepsilon}_2 + (x-y)\cdot\vec{\varepsilon}_3$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

① Έστω $\vec{x} \in E$. Τότε $\vec{x}$: Γ.Α. $\Leftrightarrow \vec{x} \neq \vec{0}$ $\left[\begin{array}{l}\lambda\cdot\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{x} = \vec{0}\end{array}\right]$

② Το σύνολο $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, όπου $\vec{e}_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{1}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, είναι μια βάση του $\mathbb{K}^n$, η οποία καλείται κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

③ Το σύνολο $B = \{E_1, E_2, E_n\}$ όπου $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-θέση}$ $\in \mathbb{K}_n$, είναι βάση του $\mathbb{K}_n$, η οποία καλείται κανονική βάση του $\mathbb{K}_n$

④ Το σύνολο $B = \left\{ E_{ij} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{array} \right\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, η οποία καλείται κανονική βάση του $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, όπου

$$E_{ij} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i\text{-γραμμή} \\ \qquad\quad \uparrow & \\ \qquad\; j\text{-στήλη} & \end{array}$$

• $\langle B \rangle = \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ διότι:

$\forall A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}): A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + \dots + a_{1n}E_{1n} + a_{m1}E_{m1} + \dots + a_{mn}E_{mn}$

• B: Γ.Α., διότι: $\lambda_{11}E_{11} + \dots + \lambda_{1n}E_{1n} + \lambda_{m1}E_{m1} + \dots + \lambda_{mn}E_{mn} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \lambda_{ij} = 0 \\ 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{array}$

⑤ $\mathbb{K}_n[t]$: ο $\mathbb{K}$-δ.χ. των πολυωνύμων με βαθμό $\leq n$, υπεράνω του $\mathbb{K}$.
$B=\{1,t,t^2,\ldots,t^n\}$: βάση του $\mathbb{K}_n[t]$ η οποία καλείται κανονική βάση

- $\forall P(t)\in\mathbb{K}_n[t]: P(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n=a_0\cdot 1+a_1t+\ldots+a_nt^n$
$\Rightarrow \langle B\rangle=\mathbb{K}_n[t]$
- αν $a_0\cdot 1+a_1t+\ldots+a_nt^n=0\Rightarrow a_0=a_1=\ldots=a_n=0\Rightarrow B=\Gamma.A$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ένα υποσύνολο $B\subseteq E$ καλείται Γ.Α. $\Leftrightarrow$ κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του B είναι Γ.Α.

- Το B καλείται σύνολο γεννητόρων $\Leftrightarrow$ κάθε διάνυσμα του E γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός πεπερασμένου πλήθους διανυσμάτων του B.
- Το B καλείται βάση $\Leftrightarrow$ (i) $\langle B\rangle=E$
(ii) B: Γ.Α.

Παράδειγμα άπειρης βάσης:
$B=\{1,t,t^2,\ldots,t^n,\ldots\}$: βάση του $\mathbb{K}[t]$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ. και έστω $X,Y\subseteq E$
① Αν X: Γ.Α. και $Y\subseteq X$, τότε Y: Γ.Α.
② Αν $\langle X\rangle=E$ και $X\subseteq Y$ τότε $\langle Y\rangle=E$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

① Έστω $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ και έστω $Y\subseteq X$. Υποθέτουμε ότι το X: Γ.Α.
Προφανώς $Y=\{\vec{x}_{i_1},\vec{x}_{i_2},\ldots,\vec{x}_{i_m}\}$: όπου $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}\in X$
Έστω $\lambda_{i_1}\vec{x}_{i_1}+\lambda_{i_2}x_{i_2}+\ldots+\lambda_{i_m}x_{i_m}=\vec{0}\Rightarrow$

$\Rightarrow\lambda_{i_1}x_{i_1}+\ldots\lambda_{i_m}\vec{x}_{i_m}+0\cdot\vec{x}_{i_{m+1}}+\ldots+0\cdot\vec{x}_{i_n}=\vec{0}$
Επειδή $X=\{x_{i_1},\ldots,x_{i_m},x_{i_{m+1}},\ldots,x_{i_n}\}$: Γ.Α. έπεται ότι:
$\lambda_{i_1}=\ldots=\lambda_{i_m}=0$ Άρα Y: Γ.Α.

② Έστω $X=\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n\}$ και $Y=\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n,\vec{y}_1,\ldots,\vec{x}_n\}$ Αν $\langle X\rangle=E$
$\Rightarrow\forall\vec{x}\in E: \vec{x}=\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_n\vec{x}_n=\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_n\vec{x}_n+0\cdot\vec{y}_1+\ldots+0\cdot\vec{y}_n\Rightarrow$
$\Rightarrow\langle Y\rangle=E$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$: Γ.Α. υποσύνολο του E και $\vec{x} \in E$. Τότε $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}\}$: Γ.Ε. $\Leftrightarrow \vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: "$\Rightarrow$" Έστω ότι $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}\}$: Γ.Ε. $\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ όχι όλοι ταυτόχρονα ίσοι με το 0: $\lambda_1\vec{x}_1 + \dots + \lambda_n\vec{x}_n + \lambda\vec{x} = \vec{0}$

Όμως $\lambda \neq 0$ διότι αν $\lambda = 0$, τότε: $\left.\begin{array}{l}\lambda_1\vec{x}_1 + \dots + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0} \\ \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}: \text{Γ.Α.}\end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ άτοπο, διότι δεν είναι όλα τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda$ ίσα με το 0.

Άρα $\lambda \neq 0$ και τότε:

$\vec{x} = (-\lambda^{-1}\cdot\lambda_1)\cdot\vec{x}_1 + \dots + (-\lambda^{-1}\cdot\lambda_n)\vec{x}_n \in \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle$

"$\Leftarrow$" Έστω $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}: \vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \dots + \lambda_n\vec{x}_n \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1)\vec{x} + \lambda_1\vec{x}_1 + \dots + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}\}$: Γ.Ε.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

① Έστω (Σ): $A\cdot X = 0$, όπου $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
Αν $n > m$ (δηλαδή πλήθος αγνώστων > πλήθος εξισώσεων) τότε το (Σ) έχει και μη-μηδενικές λύσεις

② Αν $m = n$, δηλαδή πλήθος αγνώστων = πλήθος εξισώσεων τότε:
το (Σ) έχει μόνο μηδενική λύση $\Leftrightarrow A$: αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$: βάση του $\mathbb{K}$-δ.χ. E, και έστω $C = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m\} \subseteq E$. Αν $m > n$ τότε: C: Γ.Ε.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Επειδή B: βάση του $E \Rightarrow \langle B \rangle = E$ και άρα $\vec{y}_i \in \langle B \rangle$ $\forall i = 1, \dots, m$. Δηλαδή:

$$\begin{cases} \vec{y}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n \\ \vdots \\ \vec{y}_m = a_{1m}\vec{e}_1 + \dots + a_{nm}\vec{e}_n \end{cases}$$

Έστω $\lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2 + \dots + \lambda_m\vec{y}_m = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1(a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n) + \dots + \lambda_m(a_{1m}\vec{e}_1 + \dots + a_{nm}\vec{e}_n) = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m)\vec{e}_1 + \dots + (a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m)\vec{e}_n = \vec{0}$

Έτσι

Επειδή $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$: Γ.Α. $\Rightarrow$ Το (Σ) είναι ένα σύστημα με αγνώστους $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

$$(\Sigma) \Rightarrow \begin{cases} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1m}\lambda_m = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + \ldots + a_{nm}\lambda_m = 0 \end{cases}$$

Επειδή $m>n$, έπεται ότι στο (Σ) έχουμε: πλήθος αγνώστων $= m > n =$ πλήθος εξισώσεων και άρα το (Σ) έχει τουλάχιστον μία μη-μηδενική λύση $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Τότε όμως θα έχουμε:

$\lambda_1 \vec{y}_1 + \ldots + \lambda_m \vec{y}_m = \vec{0}$ και δεν είναι όλα τα λ_i ίσα με 0.

Άρα: C: Γ.Ε.

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u>: Έστω $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$: βάση του E και $C = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\}$: Γ.Α. | Τότε $m \leq n$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Αν $m>n$, από το <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> $\Rightarrow$ C: Γ.Ε. άτοπο. Άρα $m \leq n$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Αν B_1, B_2: βάσεις του E με πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων. Τότε: $|B_1| = |B_2|$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Έστω $|B_1| = n$ και $|B_2| = m$

B_1: βάση, B_2: Γ.Α. $\xrightarrow{\text{ΠΟΡΙΣΜΑ}} m \leq n$. Παρόμοια: B_2: βάση, B_1: Γ.Α. $\xrightarrow{\text{ΠΟΡΙΣΜΑ}} n \leq m$

Άρα $n = m$, δηλαδή $|B_1| = |B_2|$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω E: πεπ/να παραγόμενος K-δ.χ. και έστω G: σύνολο γεννητόρων του E με: $|G| < \infty$. Αν F: Γ.Α. υποσύνολο του G, τότε υπάρχει βάση B του E: $F \subseteq B \subseteq G$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Θεωρούμε το σύνολο συνόλων:

$H = \{A \subseteq E \mid F \subseteq A \subseteq G$ και A: Γ.Α.$\}$

$H \neq \emptyset$ διότι $F \in H$.

Επειδή η συλλογή H είναι συλλογή υποσυνόλων του G και το G είναι πεπ/νο, έπεται ότι η συλλογή H περιέχει πεπ/να άλλα στοιχεία. Έστω B το στοιχείο της συλλογής H με το μικρότερο πλήθος στοιχείων. Δηλαδή $F \subseteq B \subseteq G$ B: Γ.Α. και το B έχει το μικρότερο πλήθος στοιχείων από όλα τα σύνολα τα οποία ανήκουν στο H

Θ.δ.ο.: B: βάση του E. Επειδή B: Γ.Α., αρκεί ν.δ.ο. $\langle B \rangle = E$

Έστω $\vec{x} \in G$ και έστω $B \cup \{\vec{x}\}$ → Γ.Α. $\Rightarrow |B \cup \{\vec{x}\}| > |B|$: άτοπο από την επιλογή του B

→ Γ.Ε.

Άρα $B \cup \{\vec{x}\}$: Γ.Ε. Τότε γνωρίζουμε ότι: $\vec{x} \in \langle B \rangle$

Άρα: $G \subseteq \langle B \rangle$, $\langle G \rangle = E$ $\Rightarrow \langle B \rangle = E$

Άρα B: βάση του E.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ, όπου $E \neq \{\vec{0}\}$ και έστω ότι E: πεπ/να παραγόμενος. Τότε ο E έχει τουλάχιστον μία βάση.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Έστω $G = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$: πεπ/νο σύνολο γεννητόρων του E. Επειδή $E \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow$ υπάρχει διάνυσμα $\vec{e}_i \in G$: $\vec{e}_i \neq \vec{0}$. Τότε θέτοντας $F = \{\vec{e}_i\}$: Γ.Α. και τότε: $F \subseteq G$. Από το Θεώρημα, υπάρχει βάση B του E έτσι ώστε: $F \subseteq B \subseteq G$

4-12-18

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω E: πεπ/να παραγόμενος $\mathbb{K}$-δ.χ. Τότε η διάσταση του E ορίζεται να είναι ο αριθμός: $\dim_{\mathbb{K}} E = \begin{cases} 0, & \text{αν } E = \{\vec{0}\} \\ |B|, & B: \text{τυχαία βάση του } E, \text{ αν } E \neq \{\vec{0}\} \end{cases}$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

① $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, διότι το σύνολο $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$: βάση του $\mathbb{K}^n$, όπου $\vec{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ $1 \leq i \leq n$

② $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n = n$, διότι $B = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$: βάση του $\mathbb{K}_n$, όπου $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $1 \leq i \leq n$

③ $\dim_{\mathbb{K}} M_{m\times n}(\mathbb{K}) = m\cdot n$, διότι το σύνολο: $B=\{E_{ij}\}_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$: βάση του $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, όπου

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-γραμμή} \\ \uparrow \\ j\text{-στήλη} \end{array}$$

④ $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[t] = n+1$, διότι το σύνολο $B=\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ είναι βάση του $\mathbb{K}_n[t]$

⑤ $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t] = \infty$, δηλαδή ο $\mathbb{K}[t]$ δεν περιέχει βάση με πεπ/νο πλήθος στοιχείων.

⑥ $\mathbb{C}$: $\mathbb{R}$-δ.χ και $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}$-δ.χ. Τότε:
$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, διότι το σύνολο $B=\{1\}$ είναι βάση του $\mathbb{C}$, υπεράνω του $\mathbb{C}$
$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, διότι το σύνολο $B=\{1, i\}$ είναι βάση του $\mathbb{C}$, υπεράνω του $\mathbb{R}$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ:
Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ με πεπ/νη διάσταση. Έστω $F=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$: ΓΑ υποσύνολο του E. Τότε υπάρχουν διανύσματα $\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n$ του E: $B=\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ βάση του E.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Επειδή ο E είναι πεπ/να παραγόμενος, ο E έχει ένα σύνολο γεννητόρων G' έτσι ώστε: $|G'|<\infty$
Το σύνολο $G=F\cup G'$ είναι τότε ένα πεπ/νο σύνολο γεννητόρων του E. Επειδή $F\subseteq G$ έπεται ότι υπάρχει βάση B του E:
$F\subseteq B\subseteq G$
Άρα $B=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_n\}$: βάση του E.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ και έστω $\dim_{\mathbb{K}} E = n$

① Κάθε ΓΑ υποσύνολο του E έχει το πολύ n-στοιχεία

② Κάθε σύνολο γεννητόρων του E έχει τουλάχιστον n-στοιχεία
③ Κάθε σύνολο διανυσμάτων του E με παραπάνω από n-στοιχεία είναι Γ.Ε.
④ Κάθε υποσύνολο B του E, το οποίο ικανοποιεί δύο από τις ακόλουθες 3 ιδιότητες, είναι βάση του E:
(i) B: Γ.Α.
(ii) $\langle B\rangle = E$
(iii) $|B| = n$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ① Αν F: Γ.Α. υποσύνολο του E, τότε από το ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ έπεται ότι υπάρχει βάση B του E με: $F \subseteq B$
Τότε: $|F| \leq |B| = n$
② Έστω G: ένα σύνολο γεννητόρων του E. Τότε υπάρχει μία βάση B του E: $B \subseteq G$. Τότε $n = |B| \leq |G|$
③ Προκύπτει άμεσα από το ①
④ • (i) + (ii) $\Rightarrow B$: βάση από τον ΟΡΙΣΜΟ
• (i) + (iii) $\Rightarrow B$: Γ.Α. $\xrightarrow[\text{ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ}]{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}} \exists$ βάση B' του E: $B \subseteq B'$. Τότε

$$\left.\begin{array}{l} n = |B| \leq |B'| = n \Rightarrow |B| = |B'| = n \\ B \subseteq B' \end{array}\right\} \Rightarrow B = B': \text{βάση}$$

• (ii) + (iii) $\Rightarrow$ Επειδή $\langle B\rangle = E \Rightarrow$ το B, ως σύνολο γεννητόρων του E περιέχει μία βάση B': $B' \subseteq B$. Τότε:
B': βάση

$$n = |B'| \leq |B| = n. \text{ Άρα } \left.\begin{array}{l} |B'| = |B| \\ B' \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow B' = B: \text{βάση}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
① Έστω $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$
$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,0,0) = (0,0,0) \Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \lambda_1+\lambda_2, \lambda_1) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Άρα } B: \text{Γ.Α.} \\ |B| = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Άρα το B: βάση

② Θεωρούμε πολυώνυμα $P_0(t), P_1(t), P_2(t), \ldots, P_n(t)$ και υποθέτουμε ότι $\forall k=0,\ldots,n: \deg P_k(t)=k$. Τότε το σύνολο $B=\{P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t)\}$ είναι βάση του $\mathbb{K}_n[t]$

Έστω a_{kk}: ο συντελεστής του t^k στο πολυώνυμο $P_k(t)$

Επειδή $\deg P_k(t)=k \Rightarrow a_{kk}\neq 0 \quad 0\leq k\leq n$

Έστω $\lambda_0 P_0(t)+\lambda_1 P_1(t)+\ldots+\lambda_n P_n(t)=0$

Τότε ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης t^n στο πρώτο μέλος είναι ο αριθμός $\left.\begin{array}{l}\lambda_n\cdot a_{nn}=0\\ a_{nn}\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda_n=0$. Άρα η παραπάνω σχέση γράφεται:

$\lambda_0 P_0(t)+\lambda_1 P_1(t)+\ldots+\lambda_{n-1}P_{n-1}=0$

Τότε ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης t^{n-1} στο πρώτο μέλος είναι ο $\left.\begin{array}{l}\lambda_{n-1}a^{n-1}=0\\ a_{n-1\,n-1}\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda_{n-1}=0$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, θα έχουμε:

$\lambda_n=\lambda_{n-1}=\ldots=\lambda_1=0$ και τότε η αρχική σχέση

$\left.\begin{array}{l}\lambda_0 a_{00}=0\\ a_{00}\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda_0=0$. Άρα $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$

Άρα το σύνολο $\left.\begin{array}{l}B: \text{Γ.Α.}\\ |B|=n+1=\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_n[t]\end{array}\right\}\Rightarrow B$: βάση του $\mathbb{K}_n[t]$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

① $B=\{1,(t-a),(t-a)^2,\ldots,(t-a)^n\}$, $\forall a\in\mathbb{K}$ είναι βάση του $\mathbb{K}_n[t]$

Επειδή $\deg(t-a)^k=k$, $\forall k=0,\ldots,n\Rightarrow B$: βάση

② $B=\{\underbrace{1}_{P_0(t)}, \underbrace{1+t}_{P_1(t)}, \underbrace{1+t+t^2}_{P_2(t)}, \ldots, \underbrace{1+t+t^2+\ldots+t^n}_{P_n(t)}\}$

Τότε: $\forall \kappa = 0, \ldots, n$: $\deg P_\kappa(t) = \kappa$. Άρα Β βάση του $\mathbb{K}_n(t)$

Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ και V, W υπόχωροι του E, τότε:
$V+W = \{\vec{x}+\vec{y} \in E \mid \vec{x} \in V, \vec{y} \in W\}$: άθροισμα του V και W είναι υπόχωρος του E

Το άθροισμα $V+W$ καλείται ευθύ $\Longleftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\vec{x}+\vec{y} = \vec{x}'+\vec{y}' \\ \vec{x}, \vec{y} \in V, \vec{x}', \vec{y}' \in W\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{x} = \vec{x}' \\ \vec{y} = \vec{y}'\end{array}$

ΛΗΜΜΑ: Το άθροισμα $V+W$ είναι ευθύ $\Leftrightarrow$ $V \cap W = \{\vec{0}\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: "$\Longrightarrow$" Έστω ότι το άθροισμα $V+W$ είναι ευθύ.

Έστω $\vec{x} \in V \cap W$. Τότε $\left.\begin{array}{l}\vec{x} = \underset{\in V}{\vec{x}} + \underset{\in W}{\vec{0}} \\ \phantom{\vec{x}} = \underset{\in V}{\vec{0}} + \underset{\in W}{\vec{x}}\end{array}\right| \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Άρα: $V \cap W = \{\vec{0}\}$

"$\Longleftarrow$" Έστω ότι $V \cap W = \{\vec{0}\}$

Έστω ότι $\vec{x}+\vec{y} = \vec{x}'+\vec{y}' \Rightarrow \underbrace{\vec{x}-\vec{x}'}_{\in V} = \underbrace{\vec{y}'-\vec{y}}_{\in W} \in V \cap W = \{\vec{0}\}$

$\vec{x}, \vec{x}' \in V$, $\vec{y}, \vec{y}' \in W$

Άρα $\begin{array}{l}\vec{x}-\vec{x}' = \vec{0} \\ \vec{y}'-\vec{y} = \vec{0}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{x} = \vec{x}' \\ \vec{y} = \vec{y}'\end{array}$. Άρα το άθροισμα $V+W$ είναι ευθύ.

Αν το άθροισμα $V+W$ είναι ευθύ θα γράφουμε: $V+W = V \oplus W$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ και $\dim_{\mathbb{K}} E = n$. Έστω $\Gamma = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_\kappa\}$ Γ.Α. υποσύνολο του E.

Αν $V = \langle \Gamma \rangle$, τότε υπάρχει υπόχωρος W του E έτσι ώστε: $E = V \oplus W$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ $\Rightarrow \exists\, \vec{e}_{\kappa+1}, \ldots, \vec{e}_n \in E$ έτσι ώστε

$B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_\kappa, \vec{e}_{\kappa+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$: βάση του E

Θέτουμε: $W = \langle \vec{e}_{\kappa+1}, \ldots, \vec{e}_n \rangle$. Θ.δ.ο. $E = V \oplus W$

• Έστω $\vec{x} \in E$. Επειδή B: βάση $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in E$: $\vec{x} = \underbrace{\lambda_1 \vec{e}_1 + \ldots + \lambda_\kappa \vec{e}_\kappa}_{\in V} + \underbrace{\lambda_{\kappa+1} \vec{e}_{\kappa+1} + \ldots + \lambda_n \vec{e}_n}_{\in W}$

$\in V+W$. Άρα $E=V+W$

• Έστω $\vec{x}\in V\cap W \Rightarrow \begin{cases} \vec{x}\in V \Rightarrow \exists \lambda_1,\dots,\lambda_k\in \mathbb{K}: \vec{x}=\lambda_1\vec{e}_1+\dots+\lambda_k\vec{e}_k \\ \vec{x}\in W \Rightarrow \exists \lambda_{k+1},\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}: \vec{x}=\lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1}+\dots+\lambda_n\vec{e}_n \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda_1\vec{e}_1+\dots+\lambda_k\vec{e}_k=\lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1}+\dots+\lambda_n\vec{e}_n \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \lambda_1\vec{e}_1+\dots+\lambda_k\vec{e}_k+(-\lambda_{k+1})\vec{e}_{k+1}+\dots+(-\lambda_n)\vec{e}_n=\vec{0} \\ \{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k,\vec{e}_{k+1},\dots,\vec{e}_n\}: \text{βάση του } E\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_i=0,\ \forall i=1,\dots,n$

Τότε έχουμε $\vec{x}=\vec{0}$.

Επομένως $V\cap W=\{\vec{0}\}$ και άρα $V+W=V\oplus W$

Έτσι: $E=V\oplus W$

7-12-18

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>. Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ και έστω ότι: $\dim_{\mathbb{K}}E=n<\infty$ και έστω V: υπόχωρος του E. Τότε: ο V έχει πεπερασμένη διάσταση και: $\dim_{\mathbb{K}}V\le\dim_{\mathbb{K}}E$. Επιπλέον $\dim_{\mathbb{K}}V=\dim_{\mathbb{K}}E \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V=E$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>. Αν C: γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του V τότε το C είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του E. Άρα $|C|\le n$. Έστω S το σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του V με το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων, έστω $S=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_m\}$ όπου $m\le n=\dim_{\mathbb{K}}E$.

<u>Θ.δ.ο.</u> S: βάση του V.

Έστω $\vec{y}\in V$, και έστω το σύνολο $S\cup\{\vec{y}\}$. Τότε $S\cup\{\vec{y}\}$: Γ.Ε. Τότε γνωρίζουμε ότι $\vec{y}\in\langle S\rangle$

Άρα το S: σύνολο γεννητόρων. Άρα το S: βάση

Άρα ο V έχει πεπερασμένη διάσταση και $\dim_{\mathbb{K}}V=m\le n=$
$=\dim_{\mathbb{K}}E$.

(Συνέχεια απόδειξης):
Έστω ότι $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} E$. Θ.δ.ο. $V=E$

Έστω $B=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$: βάση του V. Τότε τα $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$: Γ.Α. διανύσματα του E, και άρα μπορεί να συμπληρωθεί σε μία βάση B' του E. Τότε: $|B'| = n = \dim_{\mathbb{K}} E = |B|$. Επειδή $B \subseteq B'$ και $|B|=|B'| \Rightarrow B=B'$

Άρα $B=B'$: βάση του E. Άρα: $E = \langle B \rangle = V$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ., $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$, και V, W: υπόχωροι του E. Τότε:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V+W) = \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W - \dim_{\mathbb{K}}(V \cap W)$$

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω V, W: υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$ και $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$, $\dim_{\mathbb{R}} W = 4$. Να βρεθεί η $\dim_{\mathbb{K}}(V \cap W)$

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{array}{l} \dim_{\mathbb{K}}(V+W) = 3+4-\dim_{\mathbb{R}}(V\cap W) = 7 - \dim_{\mathbb{R}}(V \cap W) \\ V+W: \text{υπόχωρος του } \mathbb{R}^5 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(V+W) \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^5 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 7 - \dim_{\mathbb{R}}(V \cap W) \leq 5 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(V\cap W) \geq 2 \\ \text{Όμως: } V \cap W \subseteq V \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(V \cap W) \leq \dim_{\mathbb{R}} V = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \leq \dim_{\mathbb{R}}(V\cap W) \leq 3$$

• Έστω ότι $\dim_{\mathbb{R}}(V \cap W) = 2$. Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} \dim_{\mathbb{R}}(V+W) = 5 \\ V+W: \text{υπόχωρος του } \mathbb{R}^5 \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^5 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow V+W = \mathbb{R}^5$$

Αντίστροφα, αν $V+W=\mathbb{R}^5$ τότε $\dim_{\mathbb{R}}(V+W)=5 \xrightarrow{(*)}$
$\rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(V\cap W)=2$. Άρα: $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(V\cap W)=2 \Leftrightarrow V+W=\mathbb{R}^5}$

• Έστω $\dim_{\mathbb{R}}(V\cap W)=3$. Τότε: $V\cap W \underset{\text{υπόχωρος}}{\subseteq} V$
$\dim_{\mathbb{R}}(V\cap W)=\dim_{\mathbb{R}}V=3$ $\Big| \Rightarrow V\cap W=V \rightarrow$
$\rightarrow V\subseteq W$

Έστω ότι $V\subseteq W \Rightarrow V\cap W=V \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(V\cap W)=\dim_{\mathbb{R}}V=3$

Άρα: $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(V\cap W)=3 \Leftrightarrow V\subseteq W}$

① ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ΓΕΝΝΗΤΟΡΩΝ

• $E=\mathbb{K}^n$, $V=\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \rangle$, όπου $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \in \mathbb{K}^n$.
$\vec{x}_1=(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$
$\vec{x}_m=(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$
Θεωρούμε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn}\end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

Έστω ότι: $\Gamma(A)=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \dots & a'_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{k1} & a'_{k2} \dots & a'_{kn}\end{pmatrix}$, όπου $k\leq m$

Θεωρούμε τα διανύσματα: $\vec{y}_1=(a'_{11}, a'_{12}, \dots a'_{1n})$
$\vdots$
$\vec{y}_k=(a'_{k1}, a'_{k2} \dots, a'_{kn})$

Τότε $V=\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k \rangle$

• Γενικά, αν $B=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ βάση του E και $V=\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \rangle$
$\vec{y}_1=a_{11}\vec{e}_1+\dots+a_{1n}\vec{e}_n$
$\vdots$
$\vec{y}_m=a_{m1}\vec{e}_1+\dots+a_{mn}\vec{e}_m$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} \longmapsto \Gamma(A)=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{k1} & a'_{k2} & \dots & a'_{kn}\end{pmatrix}$$

Θέτουμε $\vec{y}_1 = a'_{11}\vec{e}_1 + \dots + a'_{1n}\vec{e}_n$

$\vdots$ και τότε $V=\langle \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k \rangle$

$\vec{y}_k = a'_{k1}\vec{e}_1 + \dots + a'_{kn}\vec{e}_n$

② <u>ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΒΑΣΗΣ</u>

- $E=\mathbb{K}^n$ Έστω $\vec{x}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$

$\vdots$

$\vec{x}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$

Τότε: το σύνολο $\underbrace{\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}}_{B}$ βάση του $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} \neq 0$$

Επειδή $|B| = n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n$, έπεται ότι: B: βάση $\Leftrightarrow B$: Γ.Α.

Όμως B: Γ.Α. $\Leftrightarrow \lambda_1\vec{x}_1 + \dots + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1(a_{11}, \dots, a_{1n}) + \dots + \lambda_n(a_{n1}, \dots, a_{nn}) = (0,0,\dots,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Leftrightarrow (a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{n1}\lambda_n, \dots, a_{1n}\lambda_1 + \dots + a_{nn}\lambda_n) = (0,\dots,0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Leftrightarrow (\Sigma)\left.\begin{matrix} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{n1}\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}\lambda_1 + \dots + a_{nn}\lambda_n = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ το ομογενές σύστημα (Σ) έχει μόνο τη μηδενική λύση.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} \neq 0$$

- Αν $B=\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$: βάση του E και $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in E$, τότε $C=\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ είναι βάση του $E \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} \neq 0$$, όπου: $\vec{x}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{1n}\vec{e}_n$

$\vdots$

$\vec{x}_n = a_{n1}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n$

③ ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ Γ.Α. ΥΠΟΣΥΝΟΛΟΥ ΣΕ ΒΑΣΗ

Έστω $B=\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\}$: Γ.Α. υποσύνολο του $\mathbb{K}^n$, όπου $m\leq n$

$\vec{x}_1=(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$

$\vdots$

$\vec{x}_m=(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$

Έστω $A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$

Προσδιορίζουμε $n-m$ γραμμές στον A'

$a_{m+1,1}, \dots, a_{m+1,n}$ έτσι ώστε:

$\vdots$

$a_{n1} \dots a_{nn}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \dots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} : |A|\neq 0$$

Τότε θέτουμε: $\vec{x}_{m+1}=(a_{m+1,1}, \dots, a_{m+1,n})$

$\vdots$

$\vec{x}_n=(a_{n1}, \dots, a_{nn})$

Τότε: $C=\{\underbrace{\underbrace{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m}_{\text{Γ.Α.}}, \vec{x}_{m+1}, \dots, \vec{x}_n}_{\text{βάση}}\}$: βάση του $\mathbb{K}^n$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $V=\langle(1,2,5,4), (3,6,5,-6), (2,4,0,-2)\rangle$

$W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y+w=0 \text{ και } x+y+z=0\}$

Να βρεθούν οι βάσεις των $V, W, V+W, V\cap W$ και να συμπληρωθούν βάσεις των V, W σε βάσεις του $\mathbb{R}^4$

ΛΥΣΗ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 0 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\mapsto r_3-2r_1]{r_2\mapsto r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\mapsto -\frac{1}{10}r_3]{r_2\mapsto r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2 \to -\frac{1}{3} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \to r_1 - 5r_2]{r_1 \to r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r(A)$$

$\vec{y}_1 = (1,2,0,0)$ Τότε: $V = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 \rangle$

$\vec{y}_2 = (0,0,1,0)$ $\lambda_1 \vec{y}_1 + \lambda_2 \vec{y}_2 + \lambda_3 \vec{y}_3 = (\lambda_1, 2\lambda_1, 0, 0) + (0,0,\lambda_2,0) + (0,0,0,\lambda_3) =$

$\vec{y}_3 = (0,0,0,1)$ $= (\lambda_1, 2\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Άρα $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$: βάση του V

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $|A| = 2 \neq 0$ και θέτοντας $\vec{y}_4 = (1,0,0,0)$, έχουμε ότι: $\{\underbrace{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3}_{\text{βάση του } V}, \vec{y}_4\}$: βάση του $\mathbb{R}^4$

$(x,y,z,w) \in W \Leftrightarrow x - y + w = 0 \Leftrightarrow w = y - x$ τότε $x, y \in \mathbb{R}$. Άρα:

$x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x - y$

$W = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} z = -x-y \\ w = +y-x \end{matrix} \right\} = \{(x, y, -x-y, y-x) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x, 0, -x, -x) + (0, y, -y, y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\} =$

$= \{x(1,0,-1,-1) + y(0,1,-1,1) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,-1,-1), (0,1,-1,1) \rangle$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: ισχυρά γ-κλιμακωτός

Τότε επίσης: $\{(1,0,-1,-1), (0,1,-1,1)\}$: Γ.Α. και άρα είναι βάση του W

Για τον $V+W$ γνωρίζουμε ότι: $V + W = \langle (1,2,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,0,-1,-1), (0,1,-1,1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \dots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε: $V+W = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle = \mathbb{R}^4$

$\dim_{\mathbb{R}}(V\cap W) = \dim_{\mathbb{R}} V + \dim_{\mathbb{R}} W - \dim_{\mathbb{R}}(V+W) = 3+2-4 = 1$

$V = \langle (1,2,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$
$W = \langle (1,0,-1,-1), (0,1,-1,1) \rangle$

Έστω $(x,y,z,w) \in V\cap W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x,y,z,w) \in V \Rightarrow (x,y,z,w) = \kappa(1,2,0,0) + \lambda(0,0,1,0) + \xi(0,0,0,1) = \\ \quad = (\kappa, 2\kappa, \lambda, \xi) \\ (x,y,z,w) \in W \Rightarrow (x,y,z,w) = \mu\cdot(1,0,-1,-1) + \nu\cdot(0,1,-1,1) = (\mu, \nu, -\mu-\nu, -\mu+\nu) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = \kappa \\ \nu = 2\kappa \\ \lambda = -\mu-\nu = -\kappa-2\kappa = -3\kappa \\ \xi = -\mu+\nu = -\kappa+2\kappa = \kappa \end{cases}$$

Άρα $(x,y,z,w) = (\kappa, 2\kappa, -3\kappa, \kappa) = \kappa(1,2,-3,1)$

Άρα $V\cap W = \langle (1,2,-3,1) \rangle$

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω $V = \langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$ όπου:
$\vec{x} = (1,1,1,a)$ $\vec{y} = (1,0,1,b)$ $\vec{z} = (-2,2,-2,c) \in \mathbb{R}^4$, $a,b,c \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ -2 & 2 & -2 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & b-a \\ 0 & 4 & 0 & c+2a \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow -\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 4 & 0 & c+2a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a+4b \end{pmatrix}$$

① $c-2a+4b \neq 0$ Τότε: $\xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{c-2a+4b}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - (a-b)\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - b\Gamma_3}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Θέτοντας $\vec{x}' = (1,0,1,0)$
$\vec{y}' = (0,1,0,0)$
$\vec{z}' = (0,0,0,1)$

Τότε: $V = \langle \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}' \rangle$

Άρα $\{\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'\}$: βάση του V

② $c - 2a + 4b = 0 \Rightarrow 2a = 4b + c$

Τότε: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Θέτοντας $\vec{x}' = (1,0,1,b)$ έχουμε:
$\vec{y}' = (0,1,0,a-b)$
$V = \langle \vec{x}', \vec{y}' \rangle$ και προφανώς
$\{\vec{x}', \vec{y}'\}$ βάση του V

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Άρα: $\{\overbrace{(1,0,1,b), (0,1,0,a-b)}^{\text{βάση του } V}, (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$
↳ βάση του $\mathbb{R}^4$

ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ - ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΒΙΒΑΣΗΣ

E: $\mathbb{K}$-δ.χ.

$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$: βάση του E
$B' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'\}$: — " —

$\forall x \in E$ $\begin{cases} \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n & ① \\ \vec{x}' = x_1'\vec{e}_1' + \dots + x_n'\vec{e}_n' & ② \end{cases}$

Θέτουμε $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ πίνακας συντεταγμένων του $\vec{x}$ ως προς τη βάση B

$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ — " — — " — — " — — " — — " — B'

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1' &= a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n \\ &\vdots \\ \vec{e}_n' &= a_{1n}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n \end{aligned}\right\} ③$$

Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση B στη βάση B' ορίζεται να είναι ο πίνακας:

$$P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = M_{B}^{B'}$$

Για το $\vec{x}$, θα έχουμε:

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n = x_1'(a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n) + \dots + x_n'(a_{1n}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n)$

$= (a_{11}x_1' + \dots + a_{n1}\vec{e}_n) + \dots + (a_{n1}x_1' + \dots + a_{nn}x_n')\vec{e}_n$ (4)

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1' + \dots + a_{1n}x_n' = x_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1' + \dots + a_{nn}x_n' = x_n \end{array}\right. \Rightarrow P\cdot X' = X.$$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Ο πίνακας μετάβασης P από τη βάση B στη βάση B' είναι αντιστρέψιμος και P^{-1} είναι ο πίνακας ~~μετάβασης~~ μετάβασης από τη B' στη B.

$|M_B^{B'}| \neq 0$ και $(M_B^{B'})^{-1} = M_{B'}^{B}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Θα έχουμε $P\cdot X' = X$

Αν $Q = M_{B'}^{B}$, έχουμε: $Q\cdot X = X'$ $\Big\} \Rightarrow P\cdot Q\cdot X = X$, $\forall X, X' \in \mathbb{K}^n$

$Q = P\cdot X' = X'$

Θέτοντας $X, X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, θα έχουμε:

$P\cdot Q = I_n$ και $Q\cdot P = I_n$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: $B = \{\vec{e}_1 = (1,1,1), \vec{e}_2 = (1,1,0), \vec{e}_3 = (1,0,0)\}$

$B' = \{\vec{e}_1' = (1,-2,0), \vec{e}_2' = (-1,0,1), \vec{e}_3' = (1,1,-1)\}$

$\vec{e}_1' = 0\cdot\vec{e}_1 + (-2)\cdot\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$

$\vec{e}_2' = 1\cdot\vec{e}_1 + (-1)\cdot\vec{e}_2 + (-1)\cdot\vec{e}_3$

$\vec{e}_3' = (-1)\vec{e}_1 + 2\cdot\vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3$

$$M_B^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

$$M_{B'}^{B} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = Q$$

11-12-19

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Έστω E, F: $\mathbb{K}$-δ.χ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία απεικόνιση $f: E \to F$ καλείται γραμμική απεικόνιση

$\iff$ (1) $\vec{x}, \vec{y} \in E : f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

(2) $\forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

① Αν $f: E \to F$ είναι γραμμική, τότε:

(α) $f(\vec{0}) = 0$

(β) $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$

(γ) $f(\vec{x}-\vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y})$

Απόδειξη: (α) $f(\vec{0}) = f(\vec{0}+\vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0}) \Rightarrow f(\vec{0}) = 0$

(β) $f(-\vec{x}) = f((-1)\cdot \vec{x}) = (-1)\cdot f(\vec{x}) = -f(\vec{x})$

(γ) $f(\vec{x}-\vec{y}) = f(\vec{x}+(-\vec{y})) = f(\vec{x}) + f(-\vec{y}) = f(\vec{x}) + (-f(\vec{y})) = f(\vec{x}) - f(\vec{y})$

② Αν $f: E \to F$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε: $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$
$\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in E : f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \lambda_2 f(\vec{x}_2) + \dots + \lambda_n f(\vec{x}_n)$

Απόδειξη: αν $n=1$, τότε $f(\lambda_1 \vec{x}_1) = \lambda_1 f(\vec{x}_1)$, από τον ορισμό

Υποθέτουμε ότι ισχύει για n διανύσματα, όπου k n. Τότε:

$f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n) = f((\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{x}_{n-1}) + (\lambda_n \vec{x}_n)) =$

$= f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{x}_{n-1}) + f(\lambda_n \vec{x}_n) =$

$= \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \dots + \lambda_{n-1} f(\vec{x}_{n-1}) + \lambda_n f(\vec{x}_n)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

① Αν E, F: $\mathbb{K}$-δ.χ., τότε η απεικόνιση:

$0: E \to F$, $0(\vec{x}) = 0$

είναι γραμμική και καλείται η μηδενική γραμμική απεικόνιση από τον E στον F.

② Αν E: $\mathbb{K}$-δ.χ., τότε $\forall r \in \mathbb{K}$, η απεικόνιση $f_r: E \to E$, $f_r(\vec{x}) = r \cdot \vec{x}$ (ομοθεσία με λόγο r)
είναι γραμμική, διότι:

- $f_r(\vec{x}+\vec{y}) = r \cdot (\vec{x}+\vec{y}) = r \cdot \vec{x} + r \cdot \vec{y} = f_r(\vec{x}) + f_r(\vec{y})$
- $f_r(\lambda \cdot \vec{x}) = r \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = (r \cdot \lambda) \vec{x} = (\lambda \cdot r) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (r \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f_r(\vec{x})$

Αν $r=0$, τότε $f_0(\vec{x}) = \vec{0}$, $\forall \vec{x} \in E \Rightarrow f_0$: η μηδενική γραμμική απεικόνιση
Αν $r=1$, τότε $f_1(\vec{x}) = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in E \Rightarrow f_1$: η ταυτοτική γραμμική απεικόνιση
$f_1 = Id_E$

③ Έστω το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, το οποίο θεωρούμε ως $\mathbb{C}$-δ.χ. και τότε γράφουμε: $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$
$\mathbb{R}$-δ.χ. και τότε γράφουμε: $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$
Θεωρούμε την απεικόνιση $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$

- $f(z+w) = \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} = f(z) + f(w)$
- αν $z = a+bi \in \mathbb{C}$, τότε $f(\lambda \cdot z) = f(\lambda \cdot (a+bi)) = f(\lambda a + \lambda \cdot bi) = \lambda a - \lambda bi =$
$= \lambda(a-bi) = \lambda \cdot \overline{z} = \lambda \cdot f(z)$

Άρα η $f: \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ είναι γραμμική

Αν $z, w \in \mathbb{C}$, $\left.\begin{matrix} f(w \cdot z) = \overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z} \\ w \cdot f(z) = w \cdot \overline{z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ γενικά $f(w \cdot z) \neq w \cdot f(z)$

Για παράδειγμα: $f(i \cdot z) = \overline{i \cdot z} = \overline{i} \cdot \overline{z} = (-i)\overline{z}$
$i f(z) = i \cdot \overline{z}$

Αν $z=1$, τότε: $\left.\begin{matrix} f(i \cdot 1) = -i \\ i \cdot f(1) = i \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Η $f: \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ δεν είναι γραμμική

④ Θεωρούμε την απεικόνιση: $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_n[t]$
$f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$
Τότε η f είναι γραμμική, διότι:

- $f((a_0, a_1, \ldots, a_n) + (b_0, b_1, \ldots, b_n)) = f(a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n) =$
$= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)t + \ldots + (a_n+b_n)t^n =$

$= a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n = f(a_0, a_1, \dots, a_n) + f(b_0, b_1, \dots, b_n)$

• $f(\lambda(a_0, a_1, \dots, a_n)) = f(\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = \lambda a_0 + \lambda a_1 t + \dots + (\lambda a_n) t^n =$
$= \lambda(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) = \lambda \cdot f(a_0, a_1, \dots, a_n)$

⑤ Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Τότε η απεικόνιση
$f_A : \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_m$, $f_A(X) = A \cdot X$
αν $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ και $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, τότε $f_A(X) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
είναι γραμμική, διότι:
• $f_A(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = f_A(X) + f_A(Y)$
• $f_A(\lambda \cdot X) = A \cdot (\lambda X) = \lambda \cdot A \cdot X = \lambda \cdot f_A(X)$

⑥ Αν $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε $\exists r \in \mathbb{K} : f = f_r$
Έστω $x \in \mathbb{K}$. Τότε $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = f(1) \cdot x$, άρα θέτοντας $r = f(1)$
θα έχουμε: $f(x) = r \cdot x = f_r(x)$, $\forall x \in \mathbb{K} \Rightarrow f = f_r$

⑦ ΜΟΡΦΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ: $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$
Έστω $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ μία γραμμική απεικόνιση. Τότε $\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^n$
$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f((x_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_m)) =$
$= f[x_1(1,0,\dots,0) + \dots + x_m(0,0,\dots,1)] =$
$= x_1 \cdot f(1,0,\dots,0) + \dots + x_m \cdot f(0,0,\dots,1)$
Επειδή: $f(1,0,\dots,0), \dots, f(0,0,\dots,1) \in \mathbb{K}^n$, μπορούμε να γράψουμε:
$f(1,0,\dots,0) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$
$\vdots$
$f(0,0,\dots,1) = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$

Άρα $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) =$
$= x_1(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) + \dots +$
$+ x_m(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) =$
$= (a_{11}x_1 + \dots + a_{m1}x_m, \dots, a_{1n}x_1 + \dots + a_{mn}x_m) =$
$= (x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = X \cdot A.$

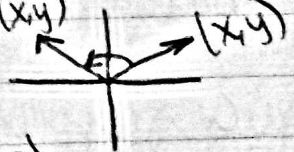
Άρα κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ είναι της μορφής:

$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = {}^tX \cdot A$, όπου A είναι κατάλληλος $m \times n$ πίνακας και αντίστροφα κάθε απεικόνιση $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ η οποία ορίζεται όπως παραπάνω είναι γραμμική.

Για παράδειγμα, η απεικόνιση:
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (3x+5y-6z,\ 4x-2y-z,\ 15x+24y-31z)$
είναι γραμμική.

Αν $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-y+z+1,\ 3x-2y,\ 6y-z)$ δεν είναι γραμμική

(θ) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} συνθ & -ημθ \\ ημθ & συνθ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$



$= (xσυνθ - yημθ,\ xημθ,\ yσυνθ)$

Η f (στροφή επιπέδου κατά γωνία θ) είναι γραμμική

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> Έστω $f: E \to F$ είναι μία γραμμική απεικόνιση
① V: υπόχωρος του $E \Rightarrow f(V)$: υπόχωρος του F
② W: υπόχωρος του $F \Rightarrow f^{-1}(W)$: υπόχωρος του E

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

① $\left.\begin{aligned} &\bullet\ \vec{0} = f(\vec{0}) \\ &V: \text{υπόχωρος του } E \Rightarrow \vec{0} \in V \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{0} = f(\vec{0}) = f(V)$

• Έστω $\vec{z}, \vec{w} \in f(V) \Rightarrow \exists\, \vec{x}, \vec{y} \in V: f(\vec{x}) = \vec{z},\ f(\vec{y}) = \vec{w}$. Τότε:

$\left.\begin{aligned} &\vec{z} + \vec{w} = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x}+\vec{y}) \\ &\vec{x}, \vec{y} \in V: \text{υπόχωρος} \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \in V \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{z}+\vec{w} = f(\vec{x}+\vec{y}) \in f(V)$

• Έστω $\vec{z} \in f(V)$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε: $\vec{z} = f(\vec{x})$, για κάποιο $\vec{x} \in V$. Τότε

$\lambda \cdot \vec{z} = \lambda \cdot f(\vec{x}) = f(\lambda \cdot \vec{x}) \in f(V)$, διότι $\left.\begin{aligned} &\vec{x} \in V \\ &V: \text{υπόχωρος} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{x} \in V$

Άρα $f(V)$ υπόχωρος του F

② $\bullet\ \vec{0} \in f^{-1}(W)$ διότι $f(\vec{0}) = \vec{0} \in W$ διότι το W: υπόχωρος του F

$\bullet$ Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in f^{-1}(W) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in W \\ W: \text{υπόχωρος} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \in W$

Όμως $f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x}+\vec{y}) \in W \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \in f^{-1}(W)$

$\bullet$ Έστω $\vec{x} \in f^{-1}(W)$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε: $\left.\begin{array}{l} f(\vec{x}) \in W \\ W: \text{υπόχωρος} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda \cdot f(\vec{x}) \in W$

Όμως $\lambda \cdot f(\vec{x}) = f(\lambda \cdot \vec{x}) \in W$
$\Rightarrow \lambda \cdot \vec{x} \in f^{-1}(W)$. Άρα $f^{-1}(W)$: υπόχωρος του E

$\bullet$ Έστω $f: E \to F$ μία γραμμική απεικόνιση
Θέτοντας $V = E$ έχουμε ότι $f(E) = \mathrm{Im}(f)$: εικόνα της f, είναι υπόχωρος του F

Θέτοντας $W = \{\vec{0}\}$, έχουμε $f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \mathrm{Ker}(f)$: πυρήνας της f, είναι υπόχωρος του E

$\mathrm{Im}(f) = \{f(\vec{x}) \in E \mid \vec{x} \in E\}$
$\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$

14-12-18

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

① Αν $f: E \to F$ είναι μία γραμμική απεικόνιση και αν $V = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle$ είναι ένας υπόχωρος του E, τότε: $f(V) = \langle f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_n) \rangle$

② Αν $f, g: E \to F$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του E, τότε:
$f = g \Leftrightarrow f(\vec{e}_i) = g(\vec{e}_i),\ 1 \le i \le n$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (2)

"$\Rightarrow$" ΠΡΟΦΑΝΕΣ

"$\Leftarrow$" $\forall \vec{x} \in E: \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n \Rightarrow f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) =$
$= x_1 f(\vec{e}_1) + \dots + x_n f(\vec{e}_n) = x_1 g(\vec{e}_1) + \dots + x_n g(\vec{e}_n) =$

$- g(x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = g(x)$

Άρα $f=g$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω $f: E \to F$ μία γραμμική απεικόνιση.

① Η f καλείται <u>μονομορφισμός</u> $\Leftrightarrow f$: 1-1

② Η f καλείται <u>επιμορφισμός</u> $\Leftrightarrow f$: επί

③ Η f καλείται <u>ισομορφισμός</u> $\Leftrightarrow f$: 1-1 και επί

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>

① Η f: μονομορφισμός $\Leftrightarrow Ker(f) = \{\vec{0}\}$

② Η f: επιμορφισμός $\Leftrightarrow Im(f) = F$

③ Η f: ισομορφισμός $\Leftrightarrow \exists$ γραμμική απεικόνιση $g: F \to E$ έτσι ώστε: $g \circ f = Id_E$ και $f \circ g = Id_F$ και τότε $g = f^{-1}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

① "$\Rightarrow$" Έστω $\vec{x} \in Ker(f)$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{0} = f(\vec{0}) \xrightarrow{f\ 1\text{-}1} \vec{x} = \vec{0}$

Άρα $Ker(f) = \{\vec{0}\}$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow f(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}-\vec{y} \in Ker(f) = \{\vec{0}\}$

Άρα $\vec{x}-\vec{y} = \vec{0} \to \vec{x} = \vec{y}$ Άρα f 1-1 $\Rightarrow f$: μονομορφισμός

② ΠΡΟΦΑΝΕΣ

③ "$\Leftarrow$" Έστω $g: F \to E$: μία γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε: $\begin{cases} f \circ g = Id_F \\ g \circ f = Id_E \end{cases}$

$f \circ g = Id_F \Rightarrow \forall \vec{x} \in F: (f \circ g)(\vec{x}) = Id_F(\vec{x}) \Rightarrow f(g(\vec{x})) = \vec{x} \Rightarrow f$: επί

Επιπλέον αν $f(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow g(f(\vec{x})) = g(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow (g \circ f)(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow Id_E(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Άρα $Ker(f) = \{\vec{0}\} \xrightarrow{(1)} f$: 1-1 Άρα f: ισομορφισμός.

f: ισομορφισμός $\Rightarrow f$: 1-1 και επί $\Rightarrow \exists f^{-1}$. $F \to E$ έτσι ώστε, θέτοντας $g = f^{-1}$, έχουμε: $f \circ g = Id_F$ και $g \circ f = Id_E$. Μένει ν.δ.ο. $g = f^{-1}$ είναι γραμμική (ΑΣΚΗΣΗ)

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΠΕΚΤΑΣΗΣ)

Έστω E, F: $\mathbb{K}$-δ.χ. και έστω $B=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$: βάση του E και $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n \in F$. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f: E \to F$

έτσι ώστε $f(\vec{e}_i)=\vec{y}_i$, $1 \leq i \leq n$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\vec{x} \in E$. Τότε $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\dots+x_n\vec{e}_n$ (μοναδική γραφή)

Ορίζουμε $f(\vec{x})=x_1\vec{y}_1+x_2\vec{y}_2+\dots+x_n\vec{y}_n \in F$

Έτσι ορίζεται η απεικόνιση: $f: E \to F$

- $\vec{e}_i = 0\cdot\vec{e}_1+\dots+1\cdot\vec{e}_i+\dots+0\cdot\vec{e}_n$

Τότε: $f(\vec{e}_i)=0\cdot\vec{y}_1+\dots+1\cdot\vec{y}_i+\dots+0\cdot\vec{y}_n=\vec{y}_i$, $1\leq i\leq n$

- Έστω $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n$ Τότε $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1)\vec{e}_1+\dots+(x_n+y_n)\vec{e}_n$

$\vec{y}=y_1\vec{e}_1+\dots+y_n\vec{e}_n$

Τότε $f(\vec{x}+\vec{y})=(x_1+y_1)\vec{y}_1+\dots+(x_n+y_n)\vec{y}_n=$

$=(x_1\vec{y}_1+\dots+x_n\vec{y}_n)+(y_1\vec{y}_1+\dots+y_n\vec{y}_n)=f(\vec{x})+f(\vec{y})$

$\forall\lambda\in\mathbb{K}: \lambda\cdot\vec{x}=(\lambda x_1)\vec{e}_1+\dots+(\lambda x_n)\vec{e}_n$

Τότε: $f(\lambda\cdot\vec{x})=(\lambda x_1)\vec{y}_1+\dots+(\lambda x_n)\vec{y}_n=\lambda(x_1\vec{y}_1+\dots+x_n\vec{y}_n)=\lambda f(\vec{x})$

Άρα f: γραμμική

Έστω $g: E\to F$ μία γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε

$g(\vec{e}_i)=\vec{y}_i$, $1\leq i\leq n$

Τότε $f=g$ διότι οι f, g είναι γραμμικές και έχουν τις ίδιες τιμές για διανύσματα μιας βάσης του E.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

① $B=\{\vec{e}_1=(1,0,0), \vec{e}_2=(0,1,0), \vec{e}_3=(0,0,1)\}$: κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

$C=\{\vec{y}_1=(3,0,2), \vec{y}_2=(5,6,-1), \vec{y}_3=(2,-4,3)\}$

Τότε $\exists!$ γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε: $f(\vec{e}_i)=\vec{y}_i$

$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z) = x\cdot\vec{e}_1 + y\cdot\vec{e}_2 + z\cdot\vec{e}_3 = x(3,0,2)+y(5,6-1), z(2,-4,3) =$
$= (3x+5y+2z,\ 6y-4z,\ 2x-y+3z)$

② $B=\{\vec{e}_1=(1,0,0),\ \vec{e}_2=(0,1,0),\ \vec{e}_3=(0,0,1)\}$: κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$
$\vec{y}_1=(1,2)\ \ \vec{y}_2=(-5,3)\ \ \vec{y}_3=(2,0)\in\mathbb{R}^2$

Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε:
$f(\vec{e}_i)=\vec{y}_i \quad 1\le i\le 3$
$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z) = x\cdot\vec{e}_1 + y\cdot\vec{e}_2 + z\cdot\vec{e}_3$ Τότε:
$f(x,y,z) = x\cdot\vec{y}_1 + y\cdot\vec{y}_2 + z\cdot\vec{y}_3 = x(1,2)+y(-5,3)+z(2,0) =$
$= (x-5y+2z,\ x+3y)$

③ $B=\{\vec{\varepsilon}_1=(1,1,1),\ \vec{\varepsilon}_2=(1,1,0),\ \vec{\varepsilon}_3=(1,0,0)\}$: βάση του $\mathbb{R}^3$
$\vec{y}_1=1,\ \vec{y}_2=2t+1,\ \vec{y}_3=3t^4-5\in\mathbb{R}_4[t]$

$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha\cdot(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,0,0) =$
$= z\cdot\vec{\varepsilon}_1 + (y-z)\vec{\varepsilon}_2 + (x-y)\vec{\varepsilon}_3$
Τότε $\exists!$ γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_4[t]$ έτσι ώστε:
$f(\vec{\varepsilon}_i)=\vec{y}_i,\ 1\le i\le 3$
$f(x,y,z) = z\cdot 1 + (y-z)(2t+1) + (x-y)(3t^4-5) =$
$= 3(x-y)t^4 + 2(x-z)t + (z-5x+5y)$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδης εξίσωση διαστάσεων)
Έστω $f:E\to F$ μία γραμμική απεικόνιση, όπου οι $\mathbb{K}$-δ.χ. E,F έχουν πεπερασμένη διάσταση. Τότε:

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} Ker(f) + \dim_{\mathbb{K}} Im(f)} \quad (*)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Έστω $\dim_{\mathbb{K}} Ker(f) = k \le n = \dim_{\mathbb{K}} E$. Έστω $B'=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_k\}$

μία βάση του $Ker(f)$. Από το Θεώρημα Επέκτασης βάσεων, έπεται ότι υπάρχουν διανύσματα $\vec{e}_{\kappa+1}, \dots, \vec{e}_n \in E$ έτσι ώστε το σύνολο $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_\kappa, \vec{e}_{\kappa+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ να είναι βάση του E.

<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ</u>: Το σύνολο $C = \{f(\vec{e}_{\kappa+1}), \dots, f(\vec{e}_n)\}$: βάση της $Im(f)$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΥ</u>

- Εξ' ορισμού $f(\vec{e}_{\kappa+1}), \dots, f(\vec{e}_n) \in Im(f) \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle f(\vec{e}_{\kappa+1}), \dots, f(\vec{e}_n) \rangle \subseteq Im(f)$ (1)

Έστω $\vec{y} \in Im(f)$. Τότε $\exists \vec{x} \in E : f(\vec{x}) = \vec{y}$. Επειδή B: βάση του E θα έχουμε $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_\kappa\vec{e}_\kappa + x_{\kappa+1}\vec{e}_{\kappa+1} + \dots + x_n\vec{e}_n$. Τότε:

$$y = f(\vec{x}) = x_1 \cancel{f(\vec{e}_1)}^{0} + \dots + x_\kappa \cancel{f(\vec{e}_\kappa)}^{0} + x_{\kappa+1} f(\vec{e}_{\kappa+1}) + \dots + x_n f(\vec{e}_n)$$

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_\kappa \in Ker(f) \Rightarrow f(\vec{e}_i) = 0, 1 \leq i \leq \kappa\}$

$\in \langle f(\vec{e}_{\kappa+1}), \dots, f(\vec{e}_n) \rangle$. Άρα $Im(f) \subseteq \langle f(\vec{e}_{\kappa+1}), \dots, f(\vec{e}_n) \rangle$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow Im(f) = \langle f(\vec{e}_{\kappa+1}), \dots, f(\vec{e}_n) \rangle$

8-1-19

• Έστω E,F: $\mathbb{K}$-δ.χ. Έστω $\dim_{\mathbb{K}} E = n$, $\dim_{\mathbb{K}} F = m$ και έστω

$B_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$: βάση του E
$B_F = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n\}$: βάση του F
Αν $f: E \to F$ είναι μία γραμμική απεικόνιση, τότε θέλοντας
$f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{\varepsilon}_i$, $1 \le j \le n$, αποκτάμε έναν $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

και ο πίνακας $A = M^{B_F}_{B_E}(f)$: ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις B_E, B_F

Τότε η απεικόνιση $\phi: \mathcal{L}(E,F) \to \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\phi(f) = M^{B_F}_{B_E}(f)$ είναι ισομορφισμός μεταξύ $\mathbb{K}$-δ.χ

• Έστω E, F, G: $\mathbb{K}$-δ.χ, $\dim_{\mathbb{K}} E = n$, $\dim_{\mathbb{K}} F = m$, $\dim_{\mathbb{K}} G = p$

Έστω $B_E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$: βάση του E
$B_F = \{\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_m\}$: βάση του F
$B_G = \{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_p\}$: βάση του G
Έστω γραμμικές απεικονίσεις $f: E \to F$ και $g: F \to G$
Τότε ορίζεται η σύνθεση $g\circ f: E \to G$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Τότε: $\boxed{M^{B_G}_{B_E}(g\circ f) = M^{B_G}_{B_F}(g) \cdot M^{B_F}_{B_E}(f)}$ $(*)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Μία γραμμική απεικόνιση $f: E \to F$, όπου $\dim_{\mathbb{K}} E = n$, $\dim_{\mathbb{K}} F = m$,
είναι ισομορφισμός $\Leftrightarrow$ $n = m$ και για κάθε βάση B_E του E και για κάθε βάση B_F του F, ο πίνακας $M^{B_F}_{B_E}(f)$: αντιστρέψιμος

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: "$\Rightarrow$" Έστω ότι f: ισομορφισμός. Τότε γνωρίζουμε ότι $n = \dim_{\mathbb{K}} E = m = \dim_{\mathbb{K}} F$.
Έστω B_E, B_F τυχαίες βάσεις στους E, F αντίστοιχα. →

→ και έστω ο $M_{B_E}^{B_F}(f)$. Επειδή η f: ισομορφισμός, υπάρχει η αντίστροφή της $f^{-1}: F \to E$ και τότε $f\circ f^{-1} = Id_F$ και $f^{-1}\circ f = Id_E$
Από τη σχέση (*) θα έχαμε: $M_{B_F}^{B_E}(f^{-1})\cdot M_{B_E}^{B_F}(f) = M_{B_E}^{B_E}(f^{-1}\circ f) = M_{B_E}^{B_E}(Id_E) = I_n$

Άρα $M_{B_F}^{B_E}(f^{-1})\cdot M_{B_E}^{B_F}(f) = I_n$

<u>Παρόμοια</u>: $M_{B_E}^{B_F}(f)\cdot M_{B_F}^{B_E}(f^{-1}) = I_n$ $\Rightarrow$ ο $M_{B_E}^{B_F}(f)$ είναι αντιστρέψιμος και $\boxed{M_{B_E}^{B_F}(f)^{-1} = M_{B_F}^{B_E}(f^{-1})}$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $n=m$ και ο πίνακας $M_{B_E}^{B_F}(f)$ είναι αντιστρέψιμος, όπου B_E, B_F: τυχαίες βάσεις του E, F.
Τότε υπάρχει ο πίνακας $M_{B_E}^{B_F}(f)^{-1} \in M_n(K)$

Τότε υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g: F\to E$ έτσι ώστε: $M_{B_F}^{B_E}(g) = M_{B_E}^{B_F}(f)^{-1}$

$$M_{B_E}^{B_F}(f)\cdot M_{B_F}^{B_E}(f)^{-1} = I_n \Rightarrow M_{B_E}^{B_F}(f)\cdot M_{B_F}^{B_E}(g) = I_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{B_F}^{B_F}(f\circ g) = I_n = M_{B_F}^{B_F}(Id_F) \Longrightarrow f\circ g = Id_F$$ $\Big\} \Rightarrow$ f: ισομορφισμός και $g = f^{-1}$

<u>Παρόμοια</u> θα έχαμε: $g\circ f = Id_E$

• Έστω E, F: K-δ.χ. και έστω $\dim_K E = n$, $\dim_K F = m$.
$B_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$: βάσεις του E | $B_F = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_m\}$: βάσεις του F
$B_E' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'\}$ | $B_F' = \{\vec{\varepsilon}_1', \vec{\varepsilon}_2', \dots, \vec{\varepsilon}_m'\}$
Έστω $f: E\to F$ μία γραμμική απεικόνιση.
<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ</u>: Ποια είναι η σχέση μεταξύ των πινάκων:
$A = M_{B_E}^{B_F}(f)$, $B = M_{B_E'}^{B_F'}(f)$;

<u>ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ</u>: Δύο πίνακες $A, B \in M_{m\times n}(K)$ καλούνται <u>ισοδύναμοι</u> και θα γράφαμε: $A \sim B \Longleftrightarrow$
$\exists$ υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $Q \in M_{m\times m}(K)$: $Q^{-1}AP = B$
-||- -||- -||- $P \in M_n(K)$

Ο.δ.ο: $M^{B_F}_{B_E}(f) \sim M^{B'_F}_{B'_E}(f)$

Θέτουμε: $P = M^{B'_E}_{B_E}$: πίνακας μετάβασης από την B_E στην B'_E

$Q = M^{B'_F}_{B_F}$: -||- -||- -||- -||- B_F στην B'_F

$f = Id_F \circ f \circ Id_E$. Τότε:

$$M^{B'_F}_{B_F}(Id_F) \cdot M^{B_F}_{B_E}(f) \cdot M^{B_E}_{B'_E}(Id_E) \overset{(*)}{=} M^{B'_F}_{B_E}(Id_F \circ f) \cdot M^{B_E}_{B'_E}(Id_E) \overset{(*)}{=}$$

$$= M^{B'_F}_{B'_E}(Id_F \circ f \circ Id_E) = M^{B'_F}_{B'_E}(f) \Rightarrow M^{B'_F}_{B_F}(Id_F) \cdot A \cdot M^{B_E}_{B'_E}(Id_E) = B$$

Επειδή: $M^{B'_F}_{B_F}(Id_F) = M^{B_F}_{B'_F} = Q^{-1}$

$M^{B_E}_{B'_E}(Id_E) = M^{B'_E}_{B_E} = P$

Θα έχουμε: $Q^{-1} \cdot A \cdot P = B$
$\Rightarrow A \sim B$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν A,B είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης ως προς διαφορετικά ζευγάρια βάσεων τότε οι A,B είναι ισοδύναμοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f: E \to F$ μία γραμμική απεικόνιση, όπου: $\dim_{\mathbb{K}} E = n$, $\dim_{\mathbb{K}} F = m$. Τότε υπάρχει βάση B στον E και βάση C στον F έτσι ώστε:

$$M^{C}_{B}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

I_r

όπου $r = r(f) \overset{ορισμός}{=} \dim_{\mathbb{K}} Im(f)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (ΘΕΔ): $\boxed{\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} Ker(f) + r(f)}$

Τότε θα έχουμε $n = \dim_{\mathbb{K}} Ker(f) + r \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} Ker(f) = n - r$

Έστω $\{\vec{e}_{r+1}, \vec{e}_{r+2}, \dots, \vec{e}_n\}$: βάση του Ker(f), την οποία επεκτείναμε σε μία βάση $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_r, \underbrace{\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n}_{\text{βάση του } Ker(f)}\}$ του E

Τότε γνωρίζαμε ότι: τα διανύσματα $\vec{\varepsilon}_1=f(\vec{e}_1),\dots,\vec{\varepsilon}_r=f(\vec{e}_r)$ αποτελούν μία βάση της $Im(f)$, την οποία συμπληρώνουμε σε μία βάση $C=\{\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_r,\vec{\varepsilon}_{r+1},\dots,\vec{\varepsilon}_m\}$ του F. Τότε θα έχαμε:

$$f(\vec{e}_1)=\vec{\varepsilon}_1=1\cdot\vec{\varepsilon}_1+0\cdot\vec{\varepsilon}_2+\dots+0\cdot\vec{\varepsilon}_r+0\cdot\vec{\varepsilon}_{r+1}+\dots+0\cdot\vec{\varepsilon}_m$$

$$\vdots$$

$$f(\vec{e}_r)=\vec{\varepsilon}_r=0\cdot\vec{\varepsilon}_1+0\cdot\vec{\varepsilon}_2+\dots+1\cdot\vec{\varepsilon}_r+0\cdot\vec{\varepsilon}_{r+1}+\dots+0\cdot\vec{\varepsilon}_m$$

$$f(\vec{e}_{r+1})=\vec{0}=0\cdot\vec{\varepsilon}_1+\dots+0\cdot\vec{\varepsilon}_r+0\cdot\vec{\varepsilon}_{r+1}+\dots+0\cdot\vec{\varepsilon}_m$$

$$\vdots$$

$$f(\vec{e}_n)=\vec{0}=0\cdot\vec{\varepsilon}_1+\dots+0\cdot\vec{\varepsilon}_r+0\cdot\vec{\varepsilon}_{r+1}+\dots+0\cdot\vec{\varepsilon}_m$$

Άρα $$M_B^C(f)=\left(\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\0&0&\dots&1\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\dots&0\\0&\dots&0\\0&\dots&0\\0&\dots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\dots&0\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{array}{c|c}I_r&0\\\hline 0&0\end{array}\right)$$

$\boxed{\text{SOS}}$

ΑΣΚΗΣΗ: $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2+x_3+2x_4,\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4,\ x_1+5x_2+3x_3-2x_4)$

ΛΥΣΗ

Έστω $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in Ker(f)\Rightarrow(x_1-x_2+x_3+2x_4,\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4,\ x_1+5x_2+3x_3-2x_4)=$
$=(0,0,0)\Rightarrow$

$$(\Sigma)\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_3+2x_4=0\\2x_1+x_2+3x_3+2x_4=0\\x_1+5x_2+3x_3-2x_4=0\end{cases}\qquad A=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\2&1&3&2\\1&5&3&-2\end{pmatrix}$$: ο πίνακας του (Σ)

Η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A είναι ο πίνακας

$$\Gamma(A)=\begin{pmatrix}1&0&4/3&4/3\\0&1&1/3&-2/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Το (Σ) είναι ισοδύναμο με το:

$$(\Sigma'):\begin{cases}x_1+\frac{4}{3}x_3+\frac{4}{3}x_4=0\\x_2+\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}x_4=0\end{cases}$$

ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ του (Σ') άρα και του (Σ) είναι η εξής:
Θέτουμε $x_3=a\in\mathbb{R}$, $x_4=b\in\mathbb{R}$ και:
$$x_1=-\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}b,\quad x_2=-\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$$

Άρα: $Ker(f) = \{(-\frac{4}{3}a - \frac{4}{3}b, -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b, a, b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\} =$

$= \langle (4,1,-3,0), (4,-2,0,-3) \rangle$ και τότε:

$\{(4,1,-3,0), (4,-2,0,-3)\}$: βάση του $Ker(f)$.

Άρα: $r(f) = 4 - \dim_{\mathbb{K}} Ker(f) = 4 - 2 = 2$

15-1-19

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα

$$(\Sigma)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Θεωρούμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα:

$$(\Sigma_0)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n} = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n} = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn} = 0 \end{cases}$$

Με χρήση πινάκων: $(\Sigma): A \cdot X = B$

$(\Sigma_0): A \cdot X = 0$

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση:

$f_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f_A(X) = A \cdot X$

Έστω $N(\Sigma) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot X = B\}$: σύνολο λύσεων του (Σ)

$N(\Sigma_0) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot X = 0\}$: σύνολο λύσεων του (Σ_0)

Τότε προφανώς: $N(\Sigma_0) = Ker(f_A)$: υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$. Από τη Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων για την f_A: $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = \dim_{\mathbb{K}} Ker(f_A) + \dim_{\mathbb{K}} Im(f_A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{n = \dim_{\mathbb{K}} N(\Sigma_0) + r(A)}$, διότι γνωρίζουμε ότι: $\dim_{\mathbb{K}} Im(f_A) = r(f_A) = r(A)$

Άρα: $\dim_{\mathbb{K}} N(\Sigma_0) = n - r(A)$

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

① Το (Σ_0) έχει μόνο τη μηδενική λύση $\Leftrightarrow n=r(A)$

② Έστω ότι: πλήθος αγνώστων του (Σ_0) > πλήθος των εξισώσεων του (Σ_0)

Τότε $n>m$. Όμως $r(A)\leq \min\{m,n\}$. Άρα: $r(A)\leq m<n$

$\rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \Lambda(\Sigma_0)=n-r(A)>0$. Άρα $\Lambda(\Sigma_0)\neq\{0\} \Rightarrow$ το (Σ_0) έχει και μη-μηδενικές λύσεις και τότε το (Σ_0) έχει άπειρες λύσεις.

Διότι, αν $X_0\in\Lambda(\Sigma_0) \Rightarrow A\cdot X_0=0$, και τότε $\forall\lambda\in\mathbb{K}: A(\lambda X_0)=\lambda\cdot A X_0=\lambda 0=0$.

Άρα $\forall\lambda\in\mathbb{K}: \lambda\cdot X_0\in\Lambda(X_0)$ και επειδή το $\mathbb{K}$ είναι άπειρο $\Rightarrow$ το (Σ_0) έχει άπειρες λύσεις

ΠΡΟΤΑΣΗ: Το γραμμικό σύστημα (Σ) είναι συμβιβαστό $\Leftrightarrow r(A)=r(A|B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το (Σ) είναι συμβιβαστό $\Leftrightarrow \Lambda(\Sigma)\neq\varnothing \Leftrightarrow \exists X\in\mathbb{K}^n: A\cdot X=B$

$\Leftrightarrow \exists X\in\mathbb{K}^n: f_A(X)=B \Leftrightarrow B\in \mathrm{Im}(f_A) \Leftrightarrow B\in\langle\Sigma_1,\Sigma_2,\dots,\Sigma_n\rangle$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: $\mathrm{Im}(f_A)=\langle\Sigma_1,\Sigma_2,\dots,\Sigma_n\rangle$

$f_A:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$. Αν $B=\{E_1,\dots,E_n\}$: κανονική βάση του $\mathbb{K}^n$, $X_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ i-θέση

Τότε: $f_A(E_i)=\Sigma_i$: i-στήλη του A.

$\Leftrightarrow \langle\Sigma_1,\Sigma_2,\dots,\Sigma_n\rangle=\langle\Sigma_1,\Sigma_2,\dots,\Sigma_n,B\rangle \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}\langle\Sigma_1,\Sigma_2,\dots,\Sigma_n\rangle=\dim_{\mathbb{K}}\langle\Sigma_1,\dots,\Sigma_n,B\rangle \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{r(A)=r(A|B)}$

Έστω ότι το (Σ) είναι συμβιβαστό. Έστω $X_0\in\Lambda(\Sigma)$ μία λύση του (Σ)

. Τότε: $A\cdot X_0=B$. Θα δείξουμε ότι:

$\Lambda(\Sigma)=\{X_0+Y\in\mathbb{K}^n \mid Y\in\Lambda(\Sigma_0)\}\ (*)$

• Έστω $X \in N(\Sigma)$. Τότε: $A \cdot X = B$ και επειδή $A \cdot X_0 = B$ $\Big\} \Rightarrow A \cdot X = A \cdot X_0 \Rightarrow A(X - X_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow X - X_0 = Y \in N(\Sigma_0)$ και άρα: $X = X_0 + Y$, όπου $Y \in N(\Sigma_0)$

Άρα: $N(\Sigma) \subseteq \{X_0 + Y \in \mathbb{K}^n \mid Y \in N(\Sigma_0)\}$

• Έστω $X_0 + Y \in \mathbb{K}^n$, όπου $Y \in N(\Sigma_0)$. Τότε:

$A \cdot (X_0 + Y) = A \cdot X_0 + A \cdot Y = B + 0 = B \Rightarrow X_0 + Y \in N(\Sigma)$.

Άρα: $\{X_0 + Y \in \mathbb{K}^n \mid Y \in N(\Sigma_0)\} \subseteq N(\Sigma)$. Άρα ισχύει η (*)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

① Έστω ότι $r(A) = n$. Το (Σ) έχει το πολύ μια λύση. Επειδή $r(A) = n \leq \min\{m,n\}$ έπεται άμεσα ότι: $r(A|B) \leq n$

ⓐ Αν $r(A|B) < n$ τότε $r(A) \neq r(B)$ και άρα το (Σ) είναι αδύνατο.

ⓑ Αν $r(A|B) = n = r(A)$ τότε το (Σ) συμβιβαστό. Έστω X_0 λύση του (Σ). Τότε επειδή $r(A) = n$, έπεται ότι $N(\Sigma_0) = \{0\}$ και επομένως: $N(\Sigma) = \{X_0 + Y \in \mathbb{K}^n \mid Y \in N(\Sigma_0)\} = \{X_0\}$. Άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση.

② Έστω ότι $\boxed{m = n = r(A)}$ Τότε $A \in M_n(\mathbb{K})$ και A: αντιστρέψιμος και επομένως το (Σ): σύστημα Cramer και άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΕΛΑΣΣΟΝΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ Έστω $1 \leq \kappa \leq \min\{m,n\}$

Θεωρούμε τυχαία κ-γραμμές από τον A και τότε σχηματίζεται ένας νέος πίνακας μεγέθους $\kappa \times n$, έστω B. Θεωρούμε τυχαία κ-στήλες του πίνακα B, και τότε σχηματίζεται ένας πίνακας C μεγέθους $\kappa \times \kappa$, η ορίζουσα του οποίου καλείται ελάσσονα ορίζουσα του A τάξης κ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

① $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & \gamma & \delta \\ x & y & z & \omega \end{pmatrix}$

· Ελάσσονες ορίζουσες τάξης 2 του A: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ a & \gamma \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ y & \omega \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & \gamma \\ y & z \end{vmatrix}, \dots$

· Ελάσσονες ορίζουσες τάξης 3 του A: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ a & \gamma & \delta \\ x & z & \omega \end{vmatrix}$

· Ελάσσονες ορίζουσες τάξης 1 του A: τα στοιχεία του A.

② $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ & -1 & +2 & -1 & -7 & 2 \\ & 2 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ & 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

ΘΕΩΡΗΜΑ [ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΒΑΘΜΙΔΑΣ]

Αν $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ και $1\le k\le \min\{m,n\}$ τότε: $r(A)=k \Leftrightarrow \exists$ ελάσσονα ορίζουσα τάξης k του A μη-μηδενική και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης k+1, οι οποίες την πλαισιώνουν είναι ίσες με 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $1\le r(A)\le \min\{4,5\}=4$

$r(A)\neq 0$ διότι $A\neq 0$

$r(A)\neq 1$ διότι $2\neq 0$ και $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & a-3 & b+2 & 0 \\ 0 & 3 & 2b+a & 2 \end{pmatrix}$$

$0 \leq r(A) \leq 3 = \min\{3,4\}$

- $r(A) \neq 0$, διότι $2 \neq 0$
- $r(A) \neq 1$, διότι ο A περιέχει την μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 2: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

- Θεωρούμε την ελάσσονα ορίζουσα τάξης 2 του A: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

Κριτήριο λαβίδας: $r(A) = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & a-3 & b+2 \\ 0 & 3 & 2b-1+a \end{vmatrix}}_{3b+6} = 0 \text{ και } \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & a-3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}_{2a-6} = 0$$

Άρα $r(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$

Τέλος $r(A) = 3 \Leftrightarrow$ είτε $a \neq 3$ είτε $b \neq -2$